グラフの良い向きづけと半辺彩色について

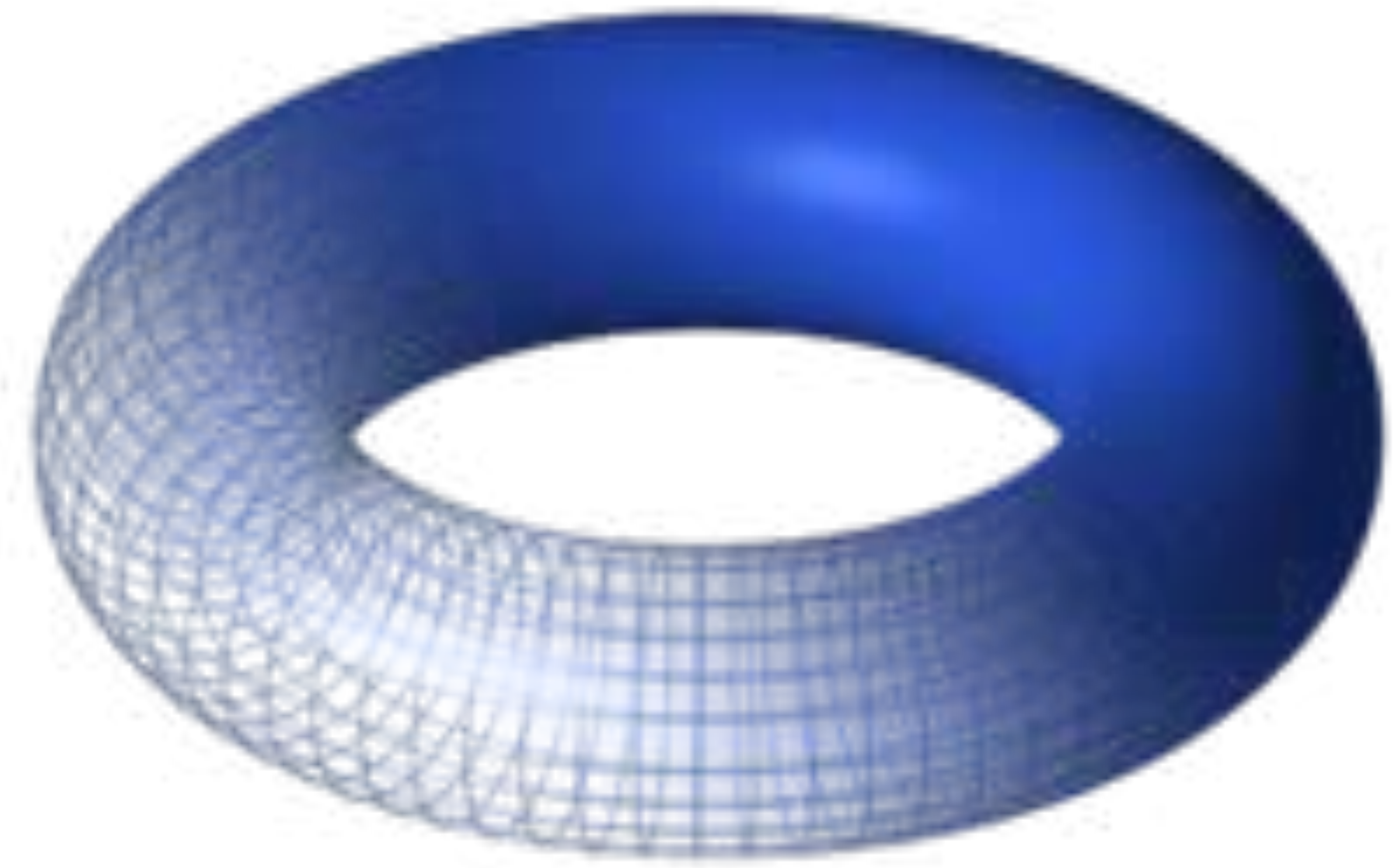
川谷　元　g-kawatani-7a5@sophia.ac.jp

本日の内容

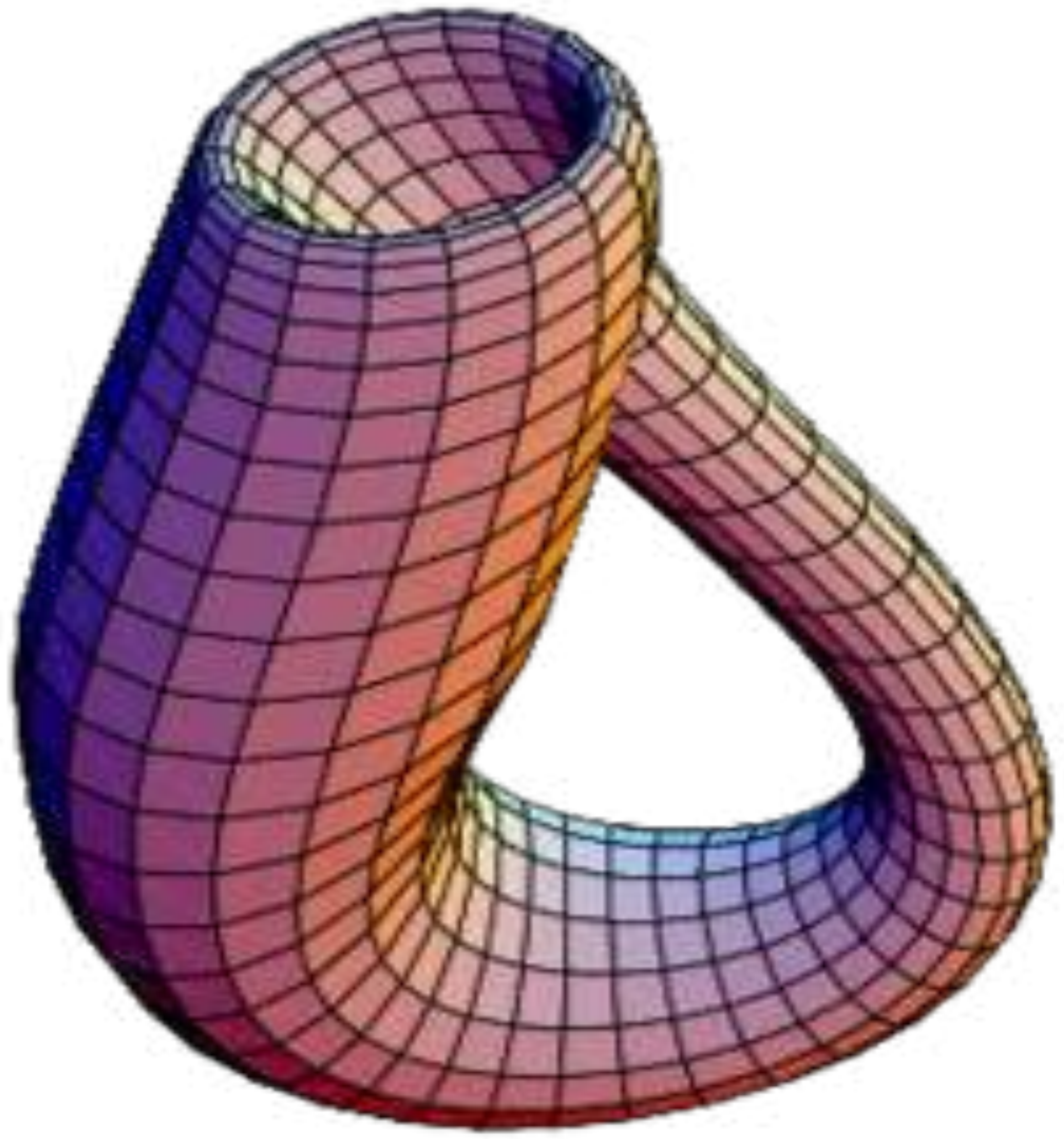
1. 無向グラフの閉曲面への埋め込み
2. 無向グラフの良い向き付け
3. 良い向き付けと半辺彩色

無向グラフの閉曲面への埋め込み

トーラス

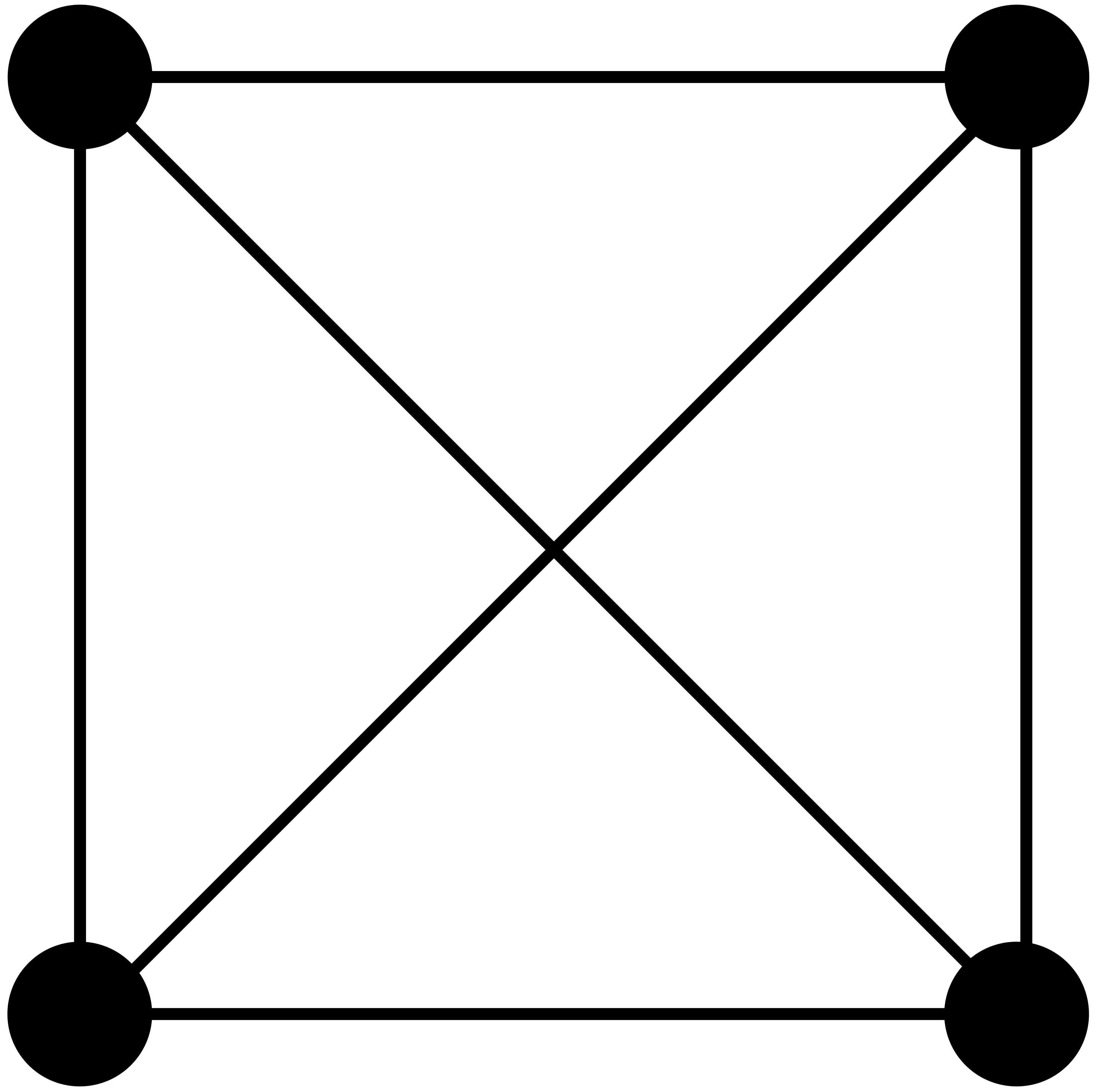


クラインの壷

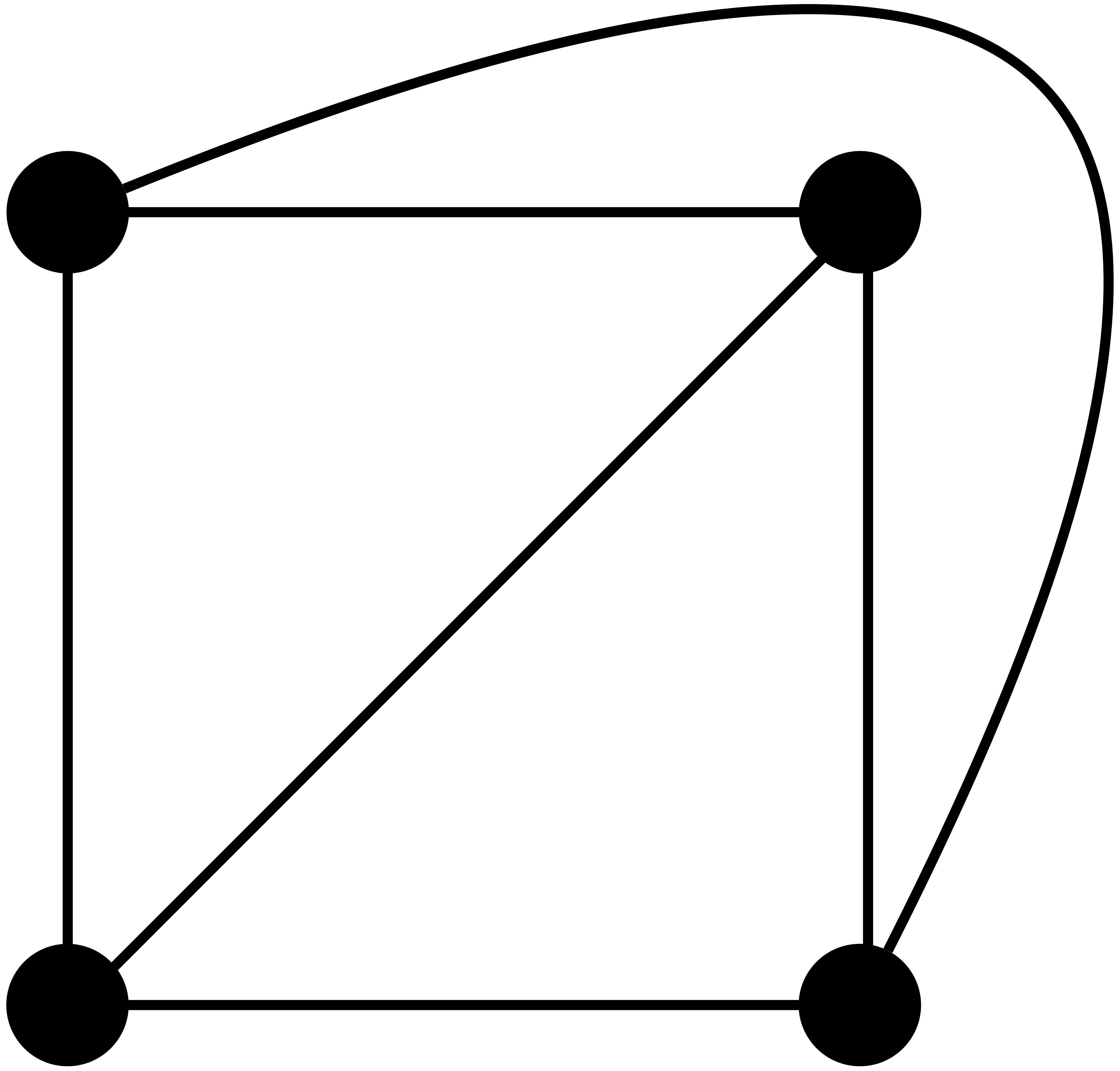


どのような無向グラフが埋め込み可能か？

平面埋め込み可能なグラフの例

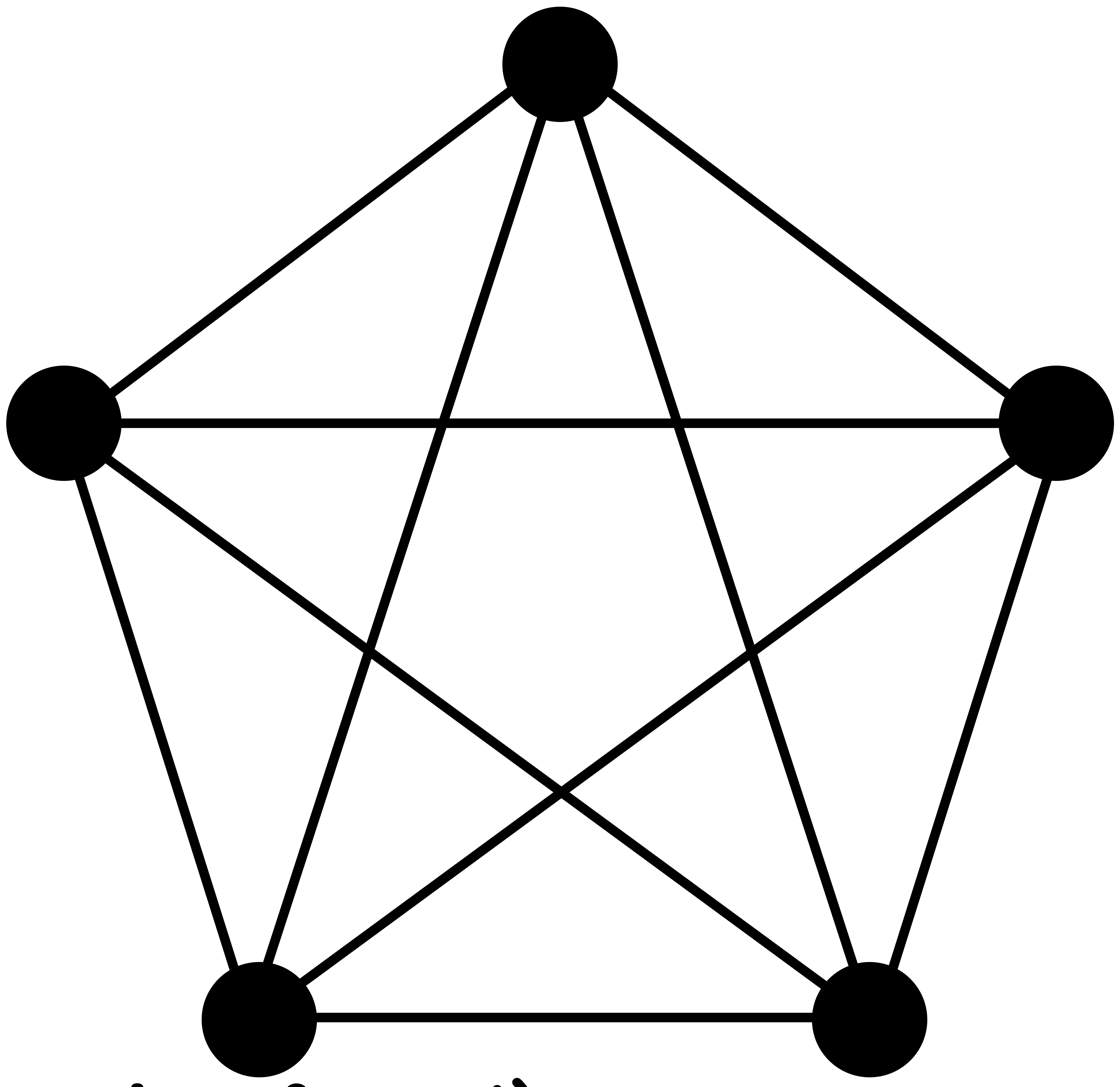


完全グラフ K_4



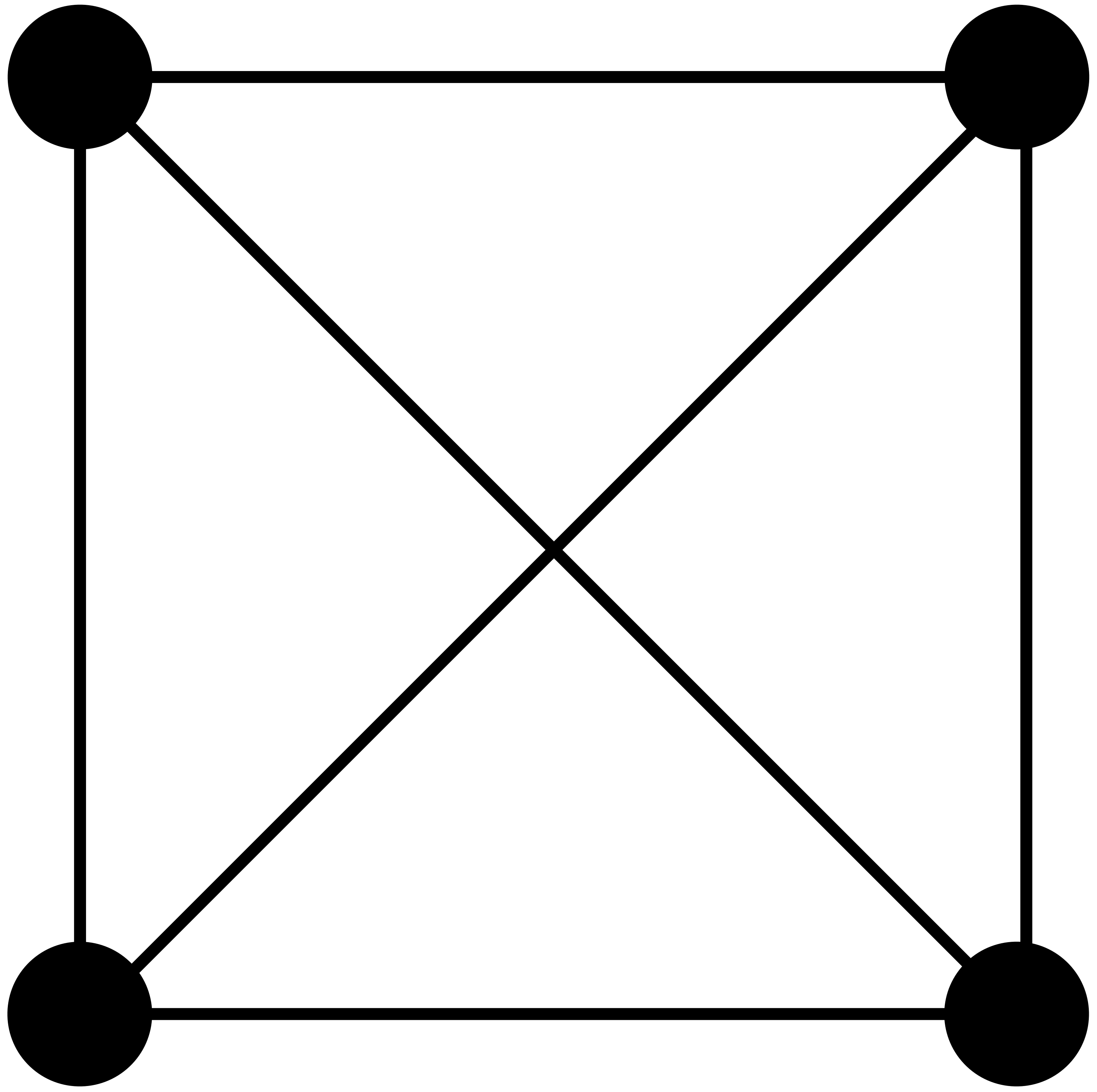
辺の交差なく
描かれた K_4

平面埋め込み不可能なグラフの例



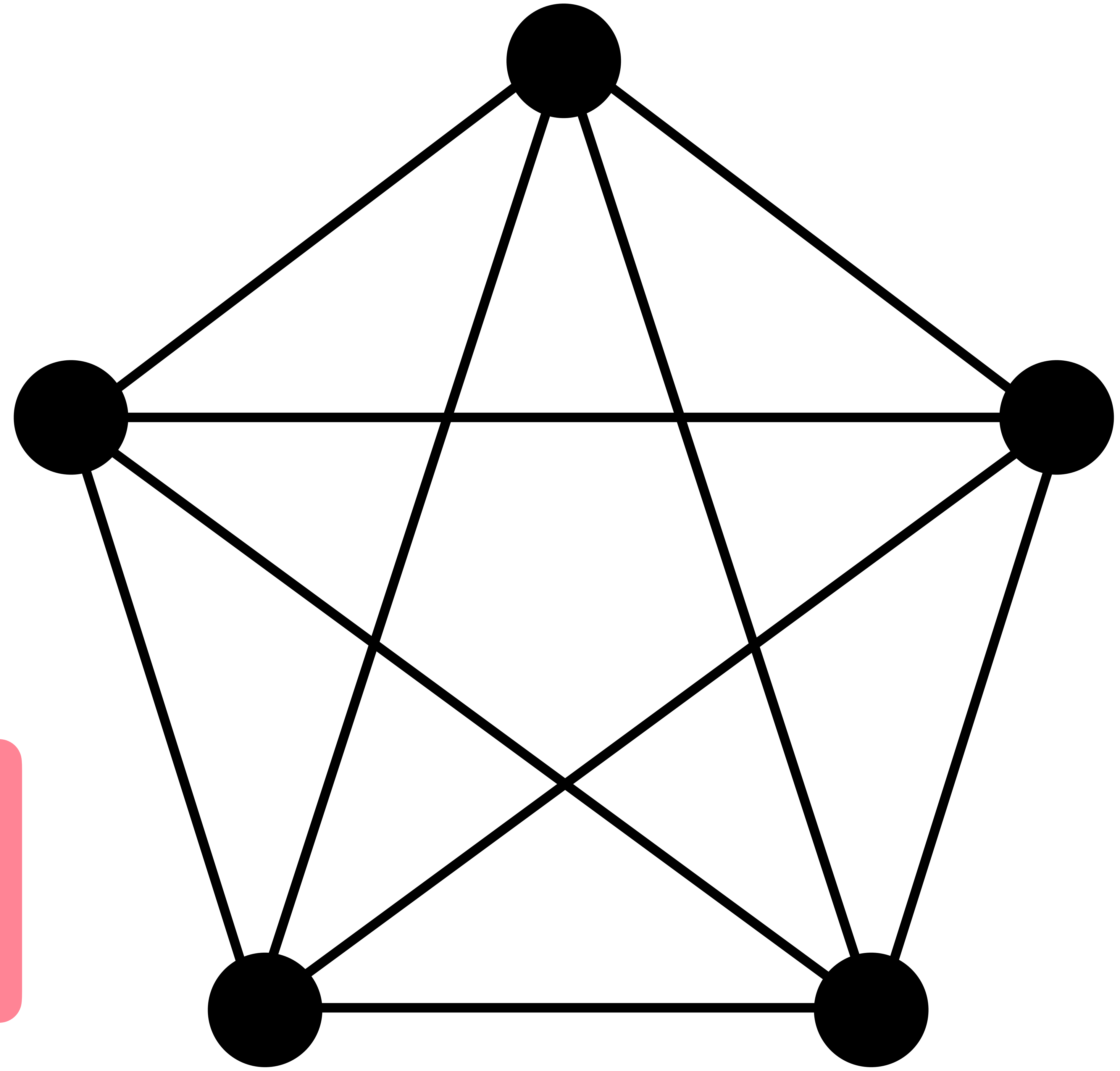
完全グラフ K_5

平面埋め込み可能な条件は何か？



完全グラフ K_4

この２つの
違いはなに？

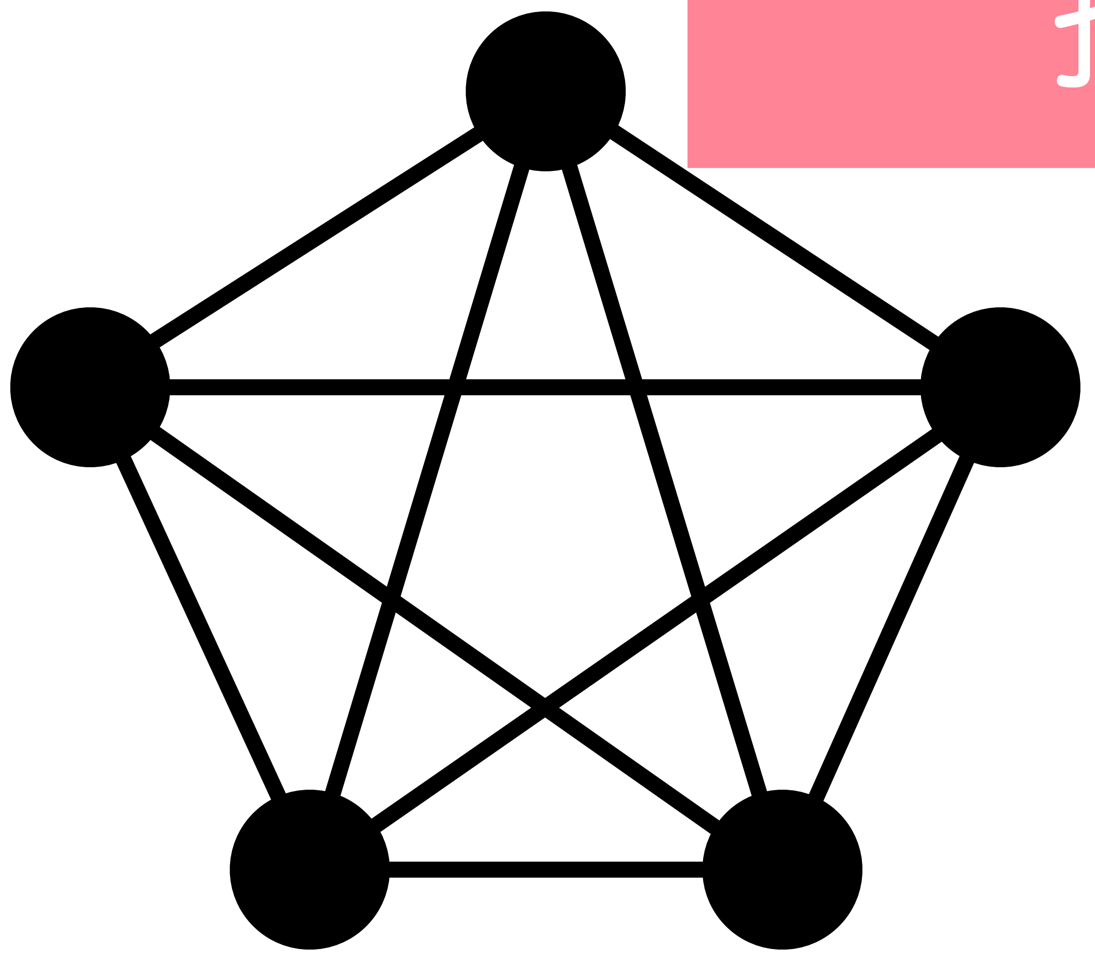


完全グラフ K_5

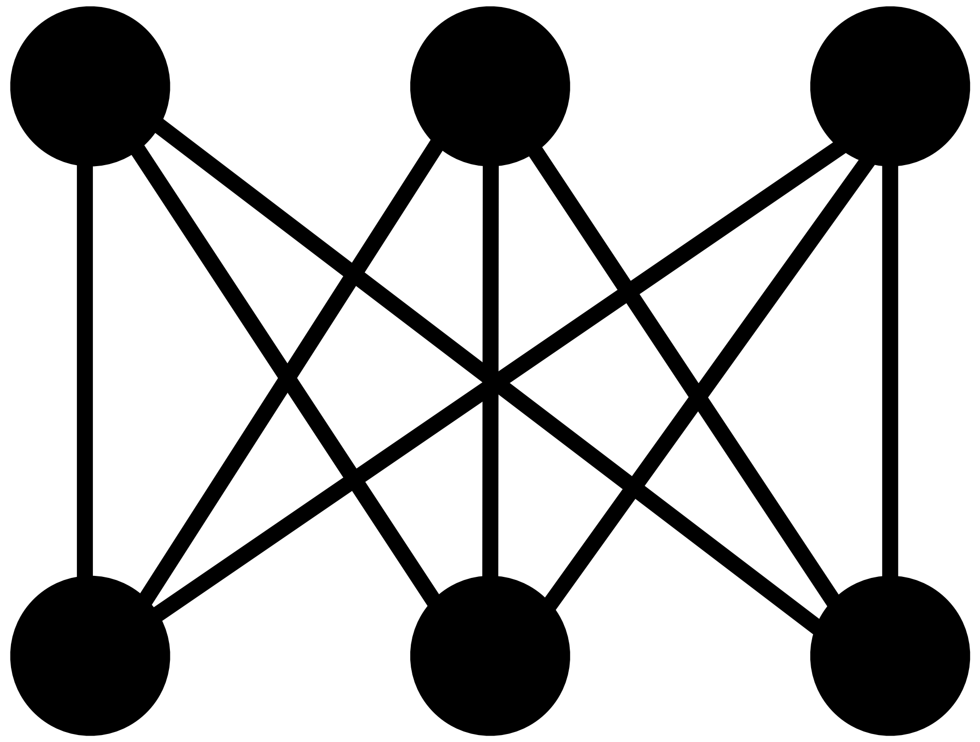
平面埋め込み可能な条件は何か？

Theorem A (Kuratowski and Wagner).
グラフGが平面的グラフであるための必要十分条件はGがK_5と$K_{3,3}$のどちらのマイナーも含まないことである.

辺の除去と縮約
孤立点の除去

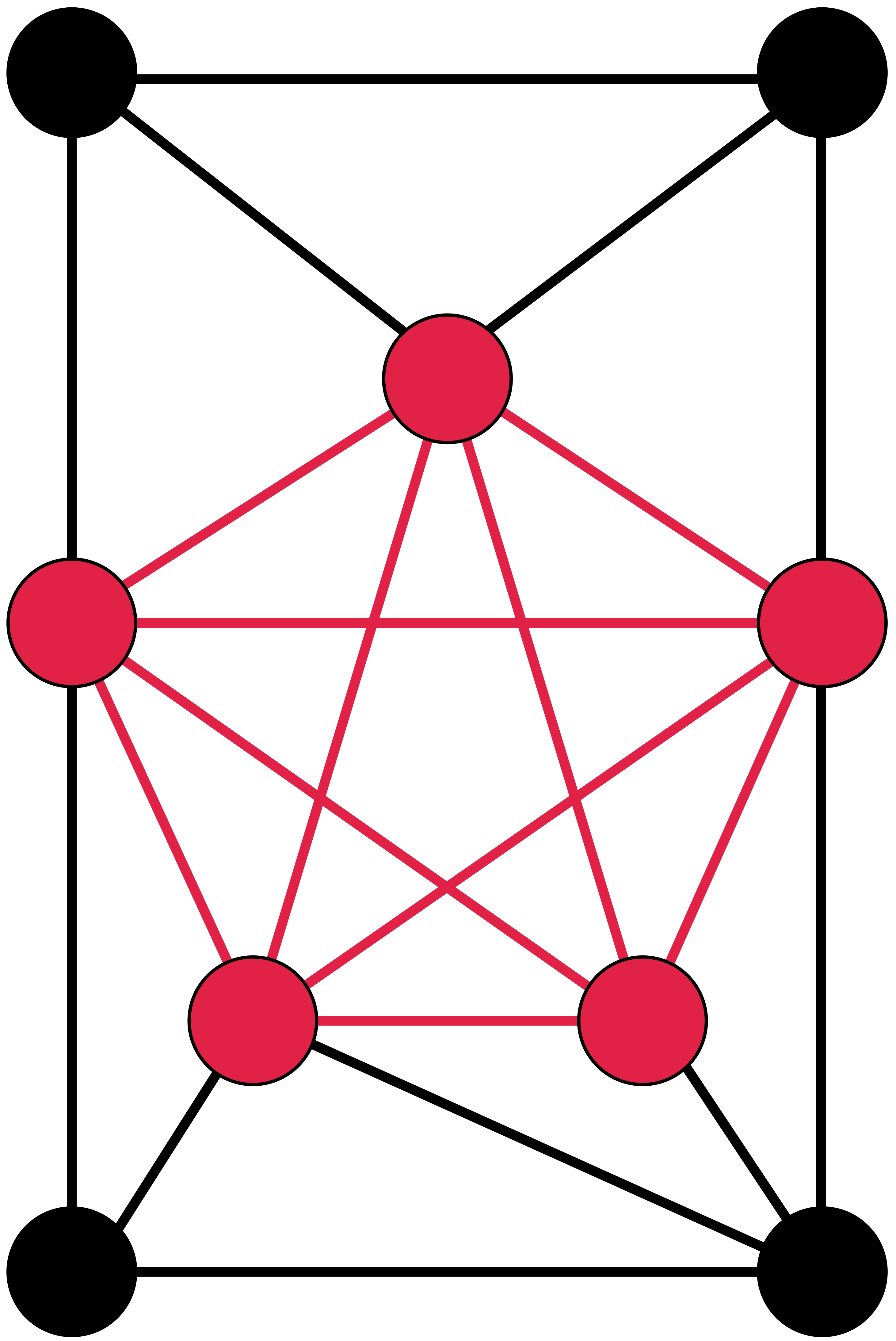


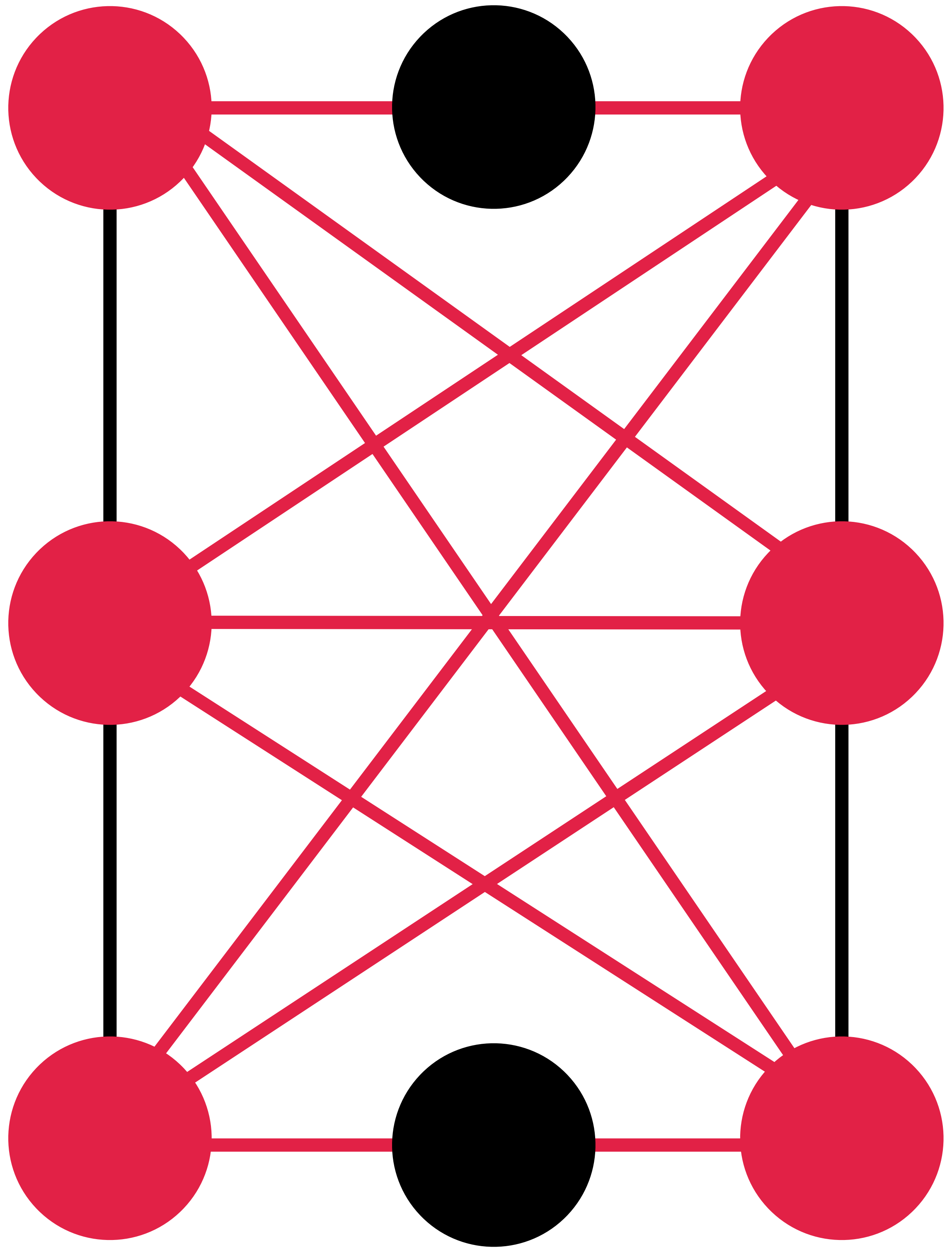
K_5



$K_{3,3}$

この２つのグラフは平面的？

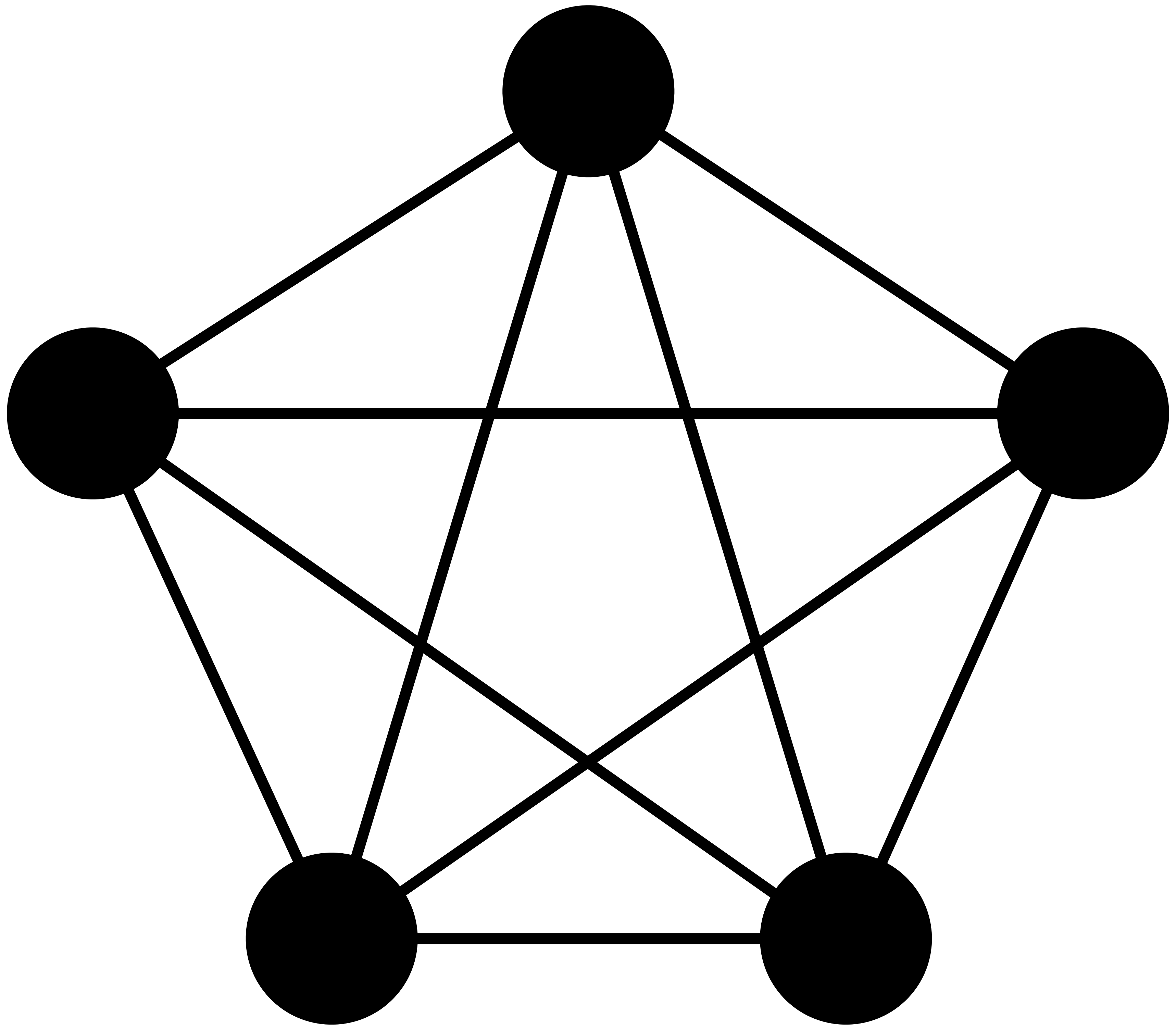




なぜ K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないのか？

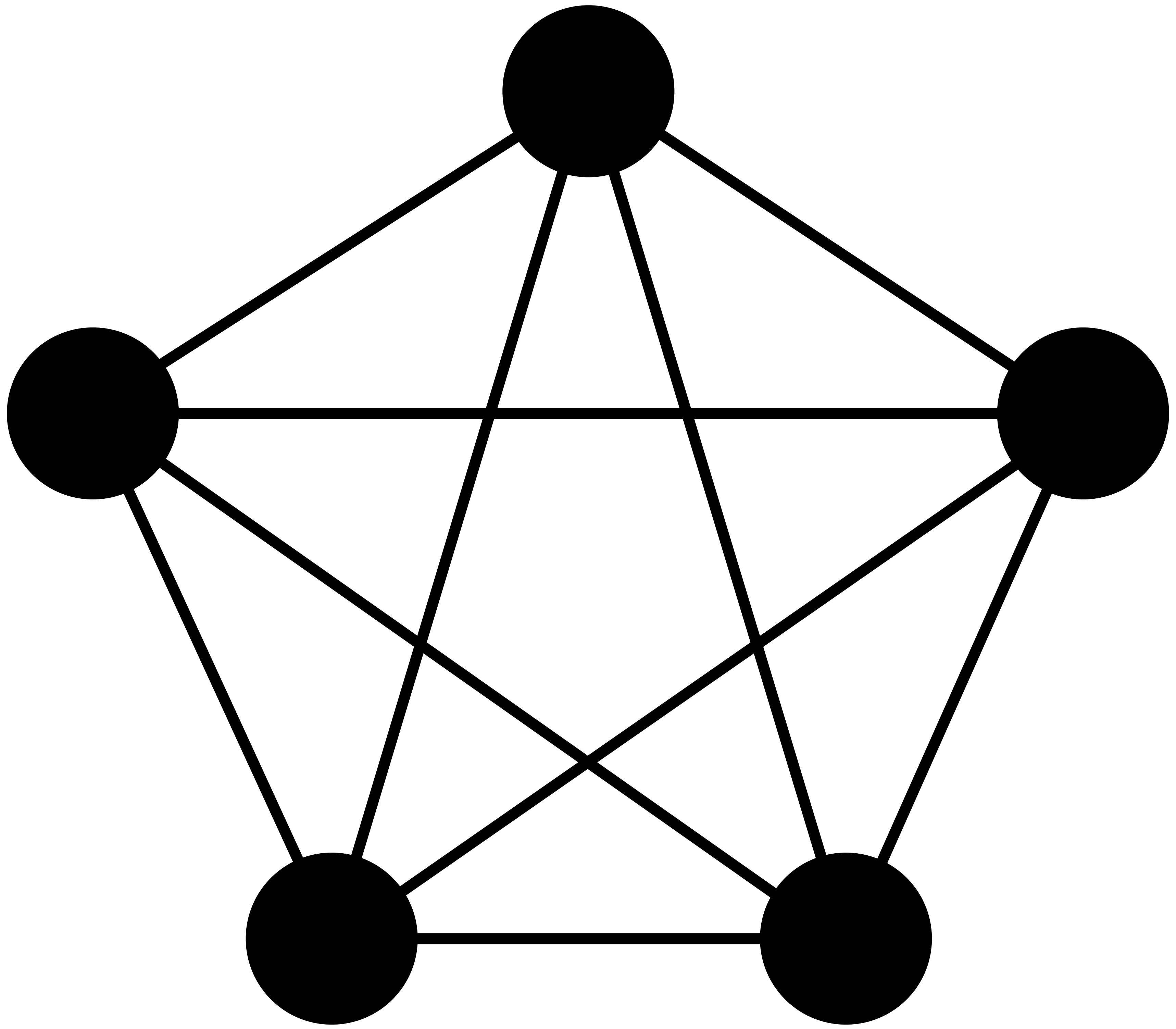
【証明の概略】

K_5 が平面に交差なく埋め込めると仮定する。



なぜ K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないのか？

【証明の概略】

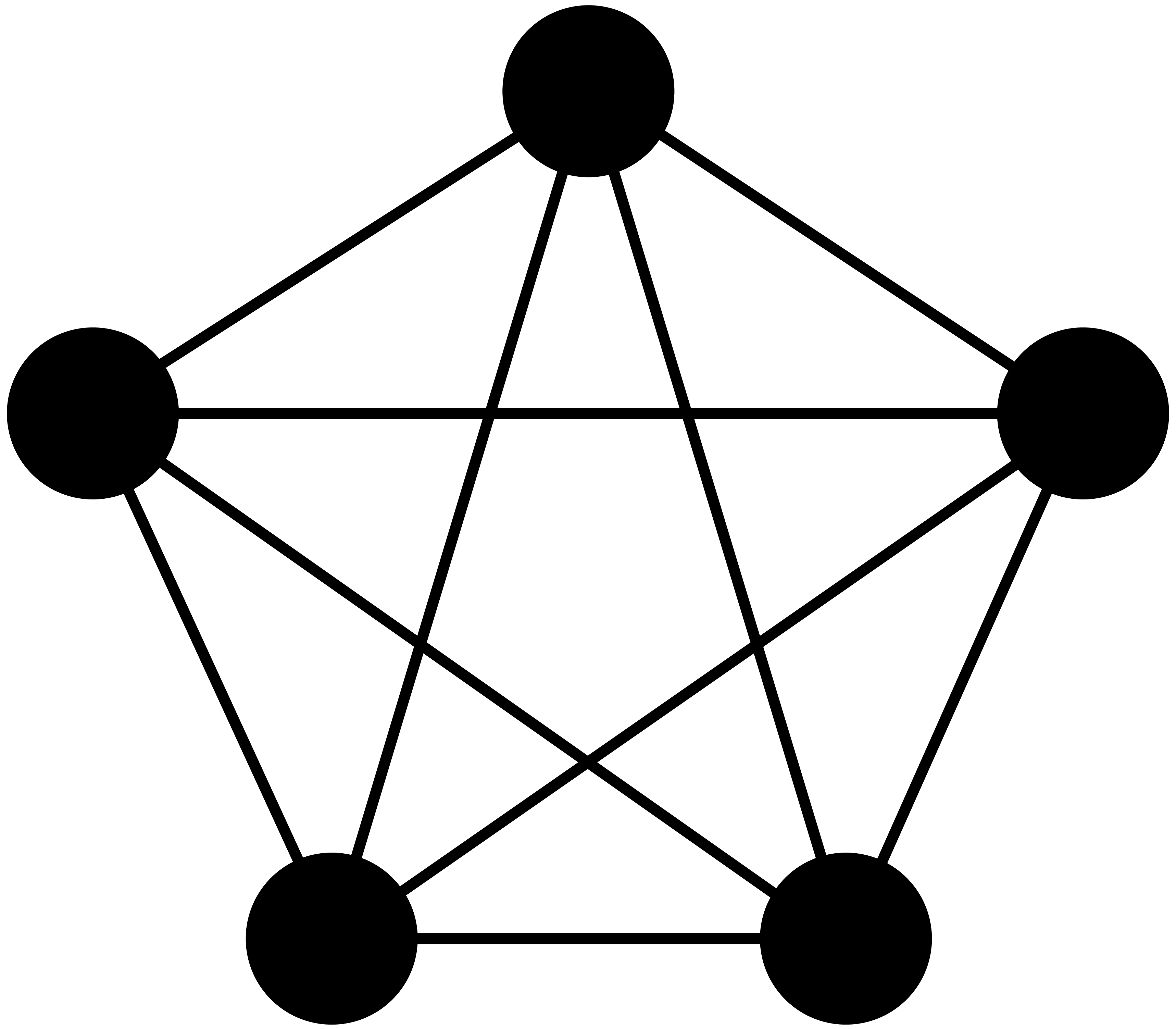


K_5 が平面に交差なく埋め込めると仮定する。

① 各辺はちょうど2つの面の境界である。

なぜ K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないのか？

【証明の概略】

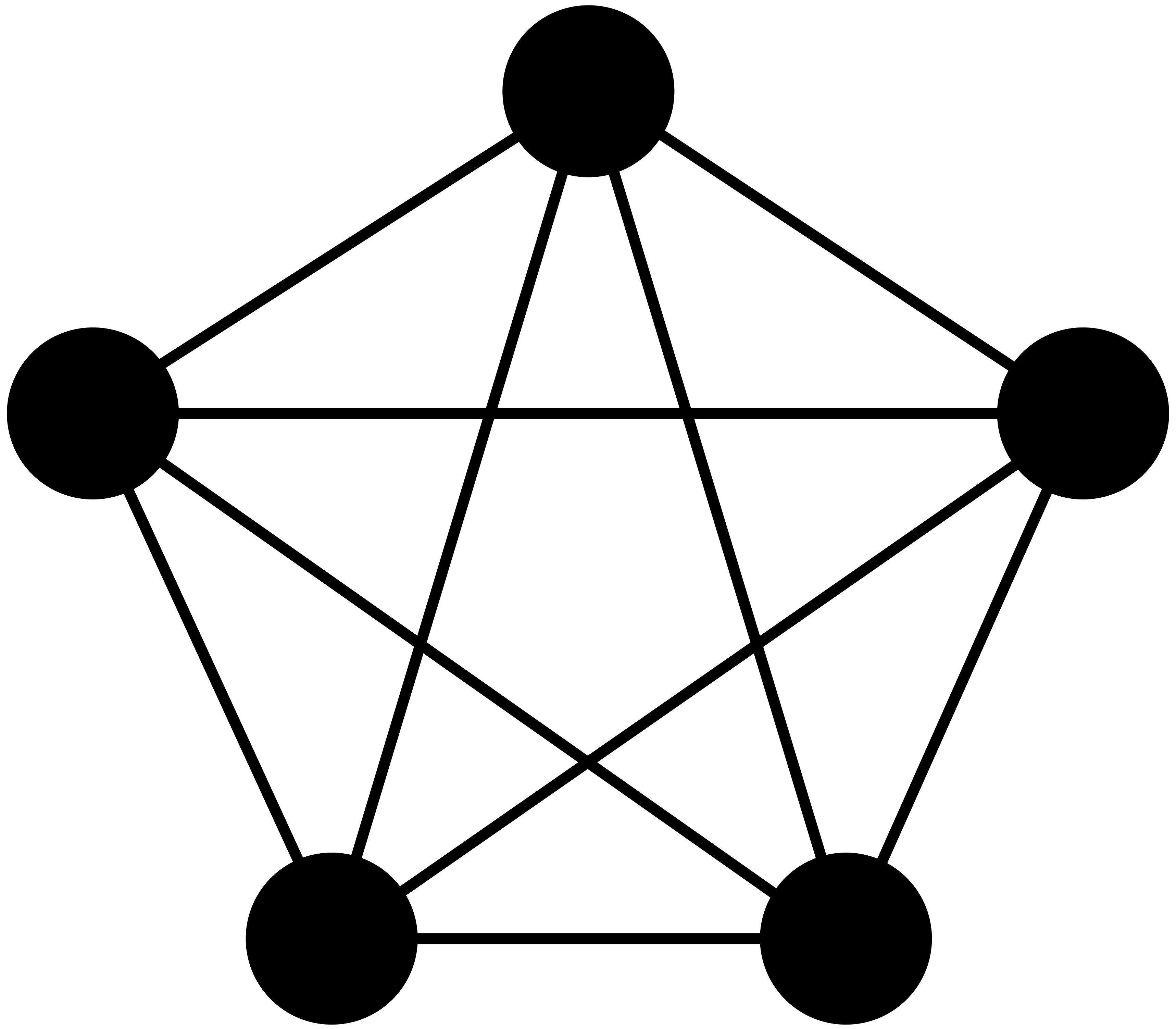


① 各辺はちょうど2つの面の境界である。

② 各面は3つ以上の辺に囲まれている。

なぜ K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないのか？

【証明の概略】



① 各辺はちょうど2つの面の境界である。

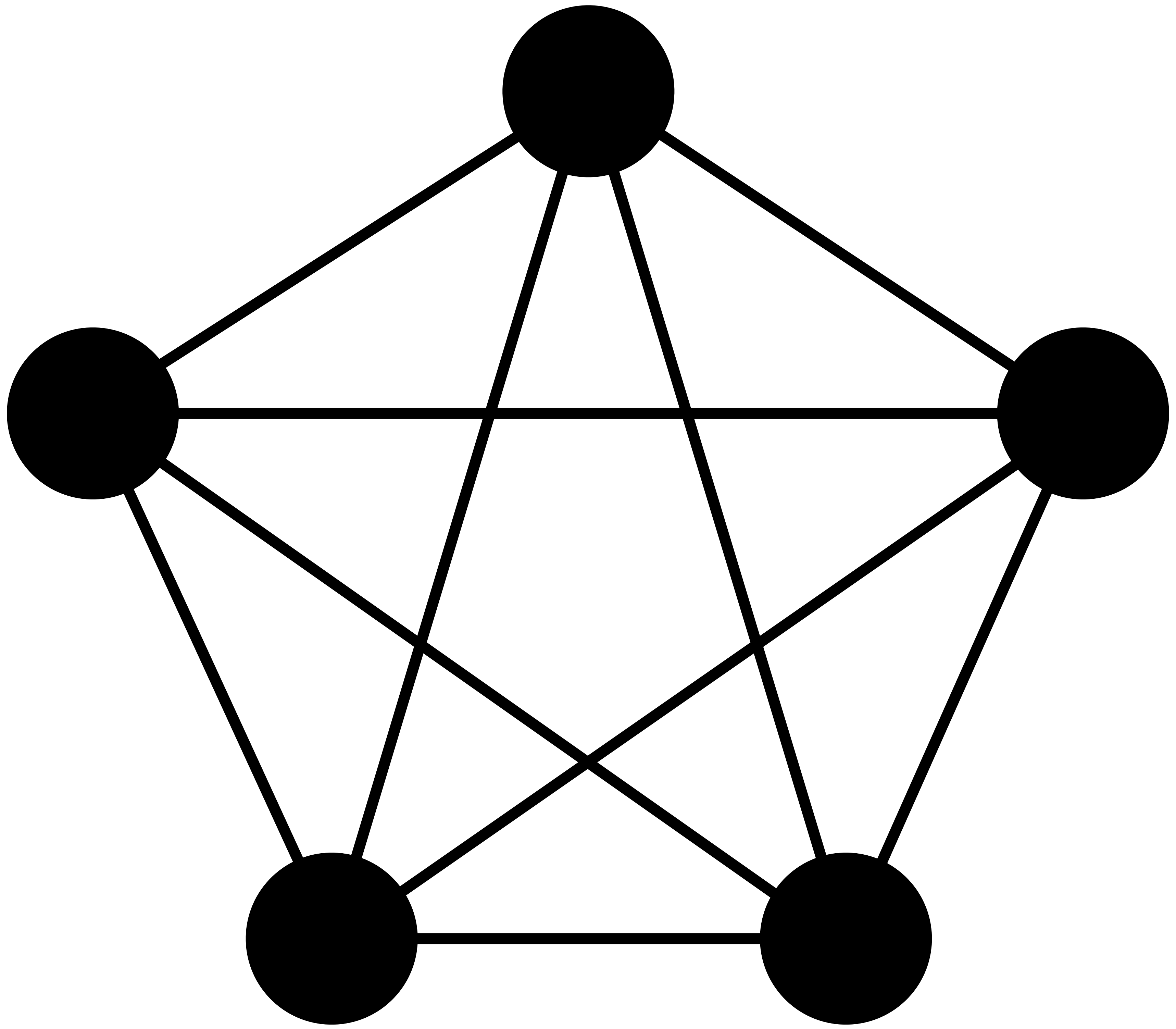
② 各面は3つ以上の辺に囲まれている。

①、②より、

$2E \geq 3F$ が成立する。

なぜ K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないのか？

V=5, E=10



①、②より、

$2E \geq 3F$ が成立する。

オイラーの定理

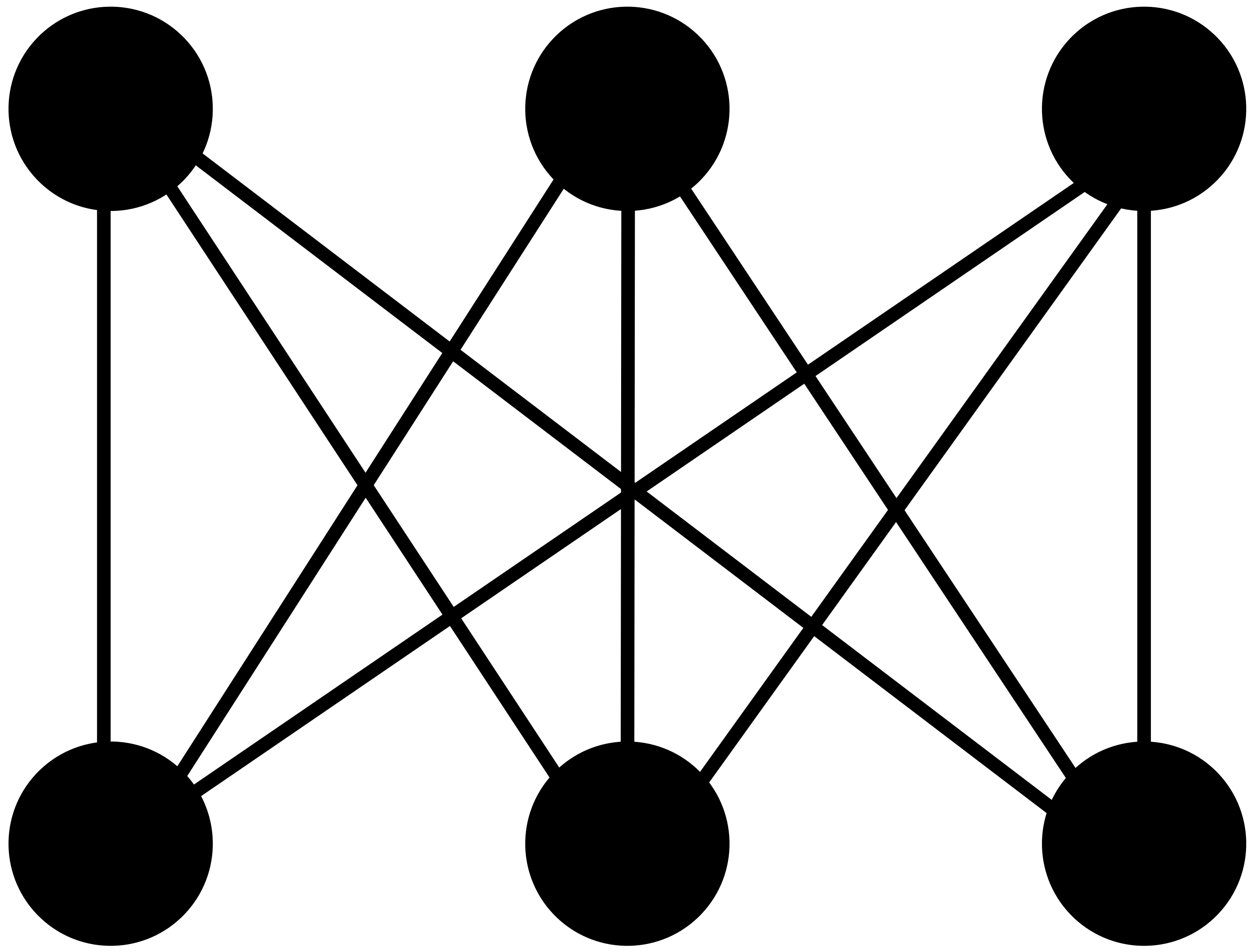
$F = 2 - V + E$ に対して、代入すると、

$2E \geq 3(2 - V + E)$

$E \geq 3V - 6$ となる。

なぜ K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないのか？

V=6, E=9



①、②より、

$2E \geq 4F$ が成立する。

オイラーの定理

$F = 2 - V + E$ に対して、代入すると、

$2E \geq 2(2 - V + E)$

$E \geq 2V - 4$ となる。

平面に埋め込まれたグラフの性質

Theorem A (Kuratowski and Wagner).
グラフGが平面的グラフであるための必要十分条件はGがK_5と$K_{3,3}$のどちらのマイナーも含まないことである.

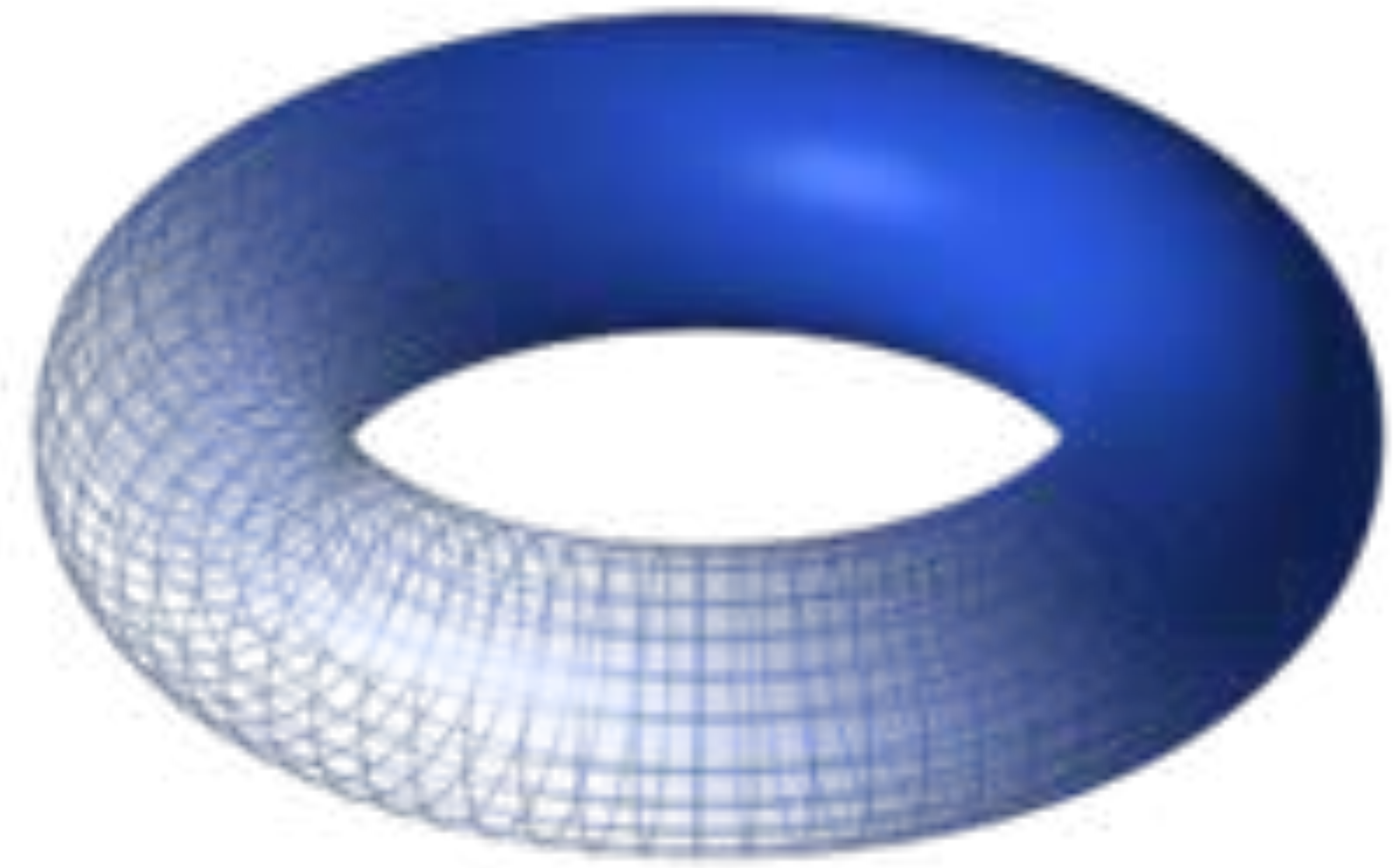
Theorem B (Appel and Haken).
平面グラフは4彩色可能である.

Minorによる他の閉曲面での特徴付け

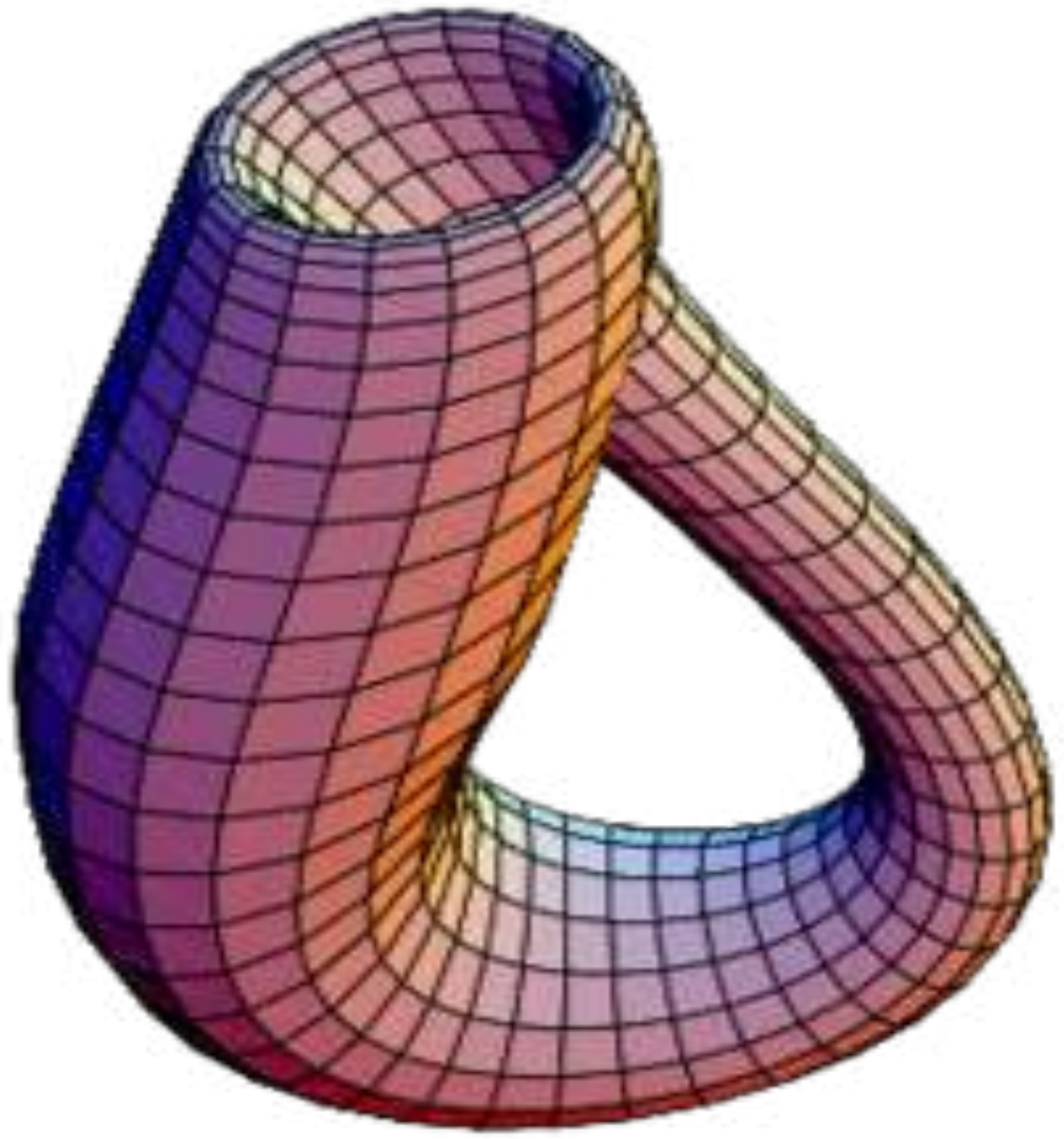
平面	射影平面	トーラス
$K_5, K_{3,3}$	35 graphs	$> 10^4 \quad (?)$

有向グラフの閉曲面への埋め込み

トーラス



クラインの壷



どのような有向グラフが埋め込み可能か？

本日の内容

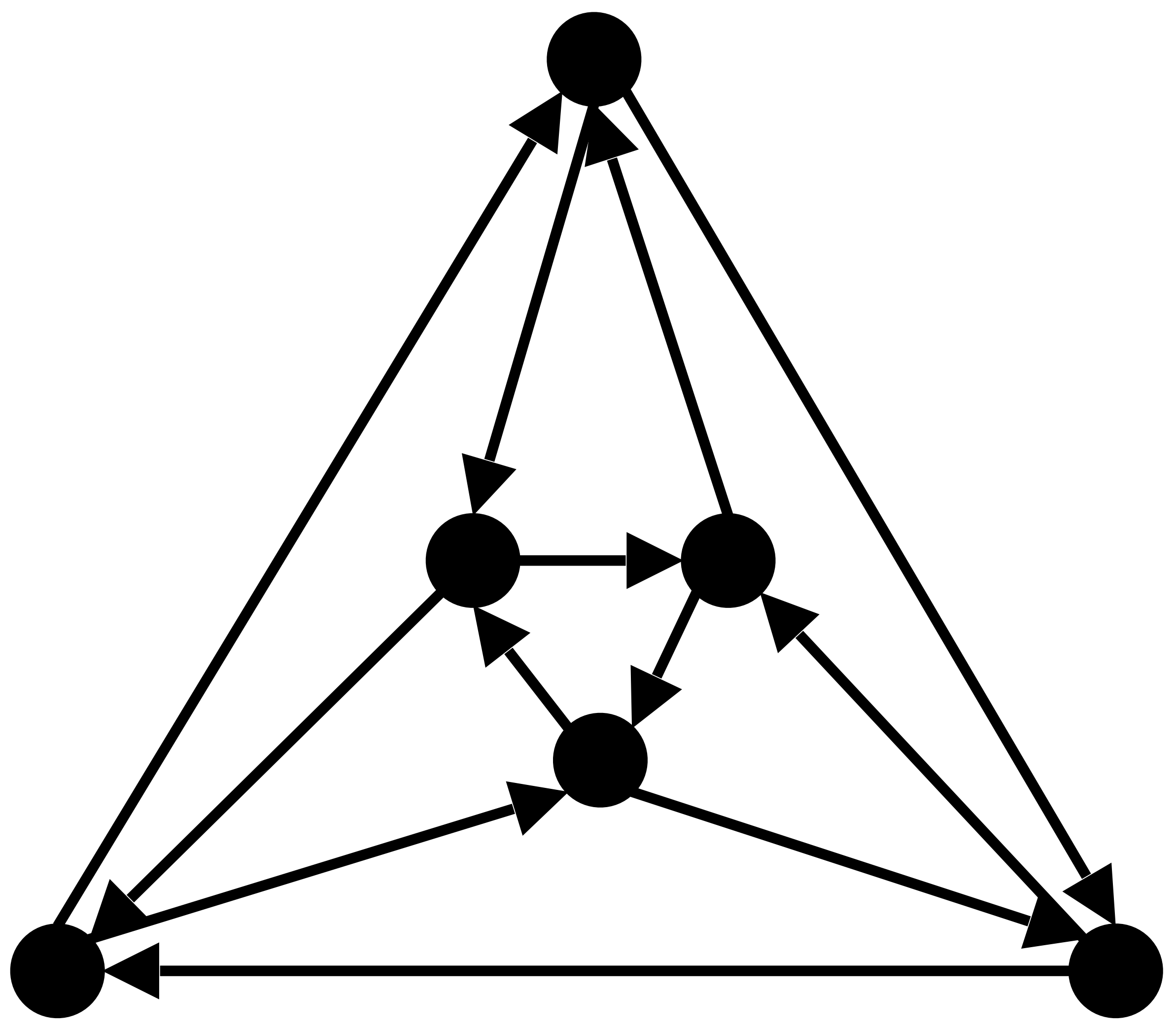
1. 無向グラフの閉曲面への埋め込み
2. 無向グラフの良い向き付け
3. 良い向き付けと半辺彩色

有向グラフの閉曲面への埋め込み

ある閉曲面 F に対して，有向グラフ D が次の2つを満たすように描かれているとき，D は F に埋め込まれているという．

・無向基礎グラフ(underlying graph)が F に埋め込まれている．

・各頂点について，その頂点を始点とする辺と終点とする辺が交互に描かれている．

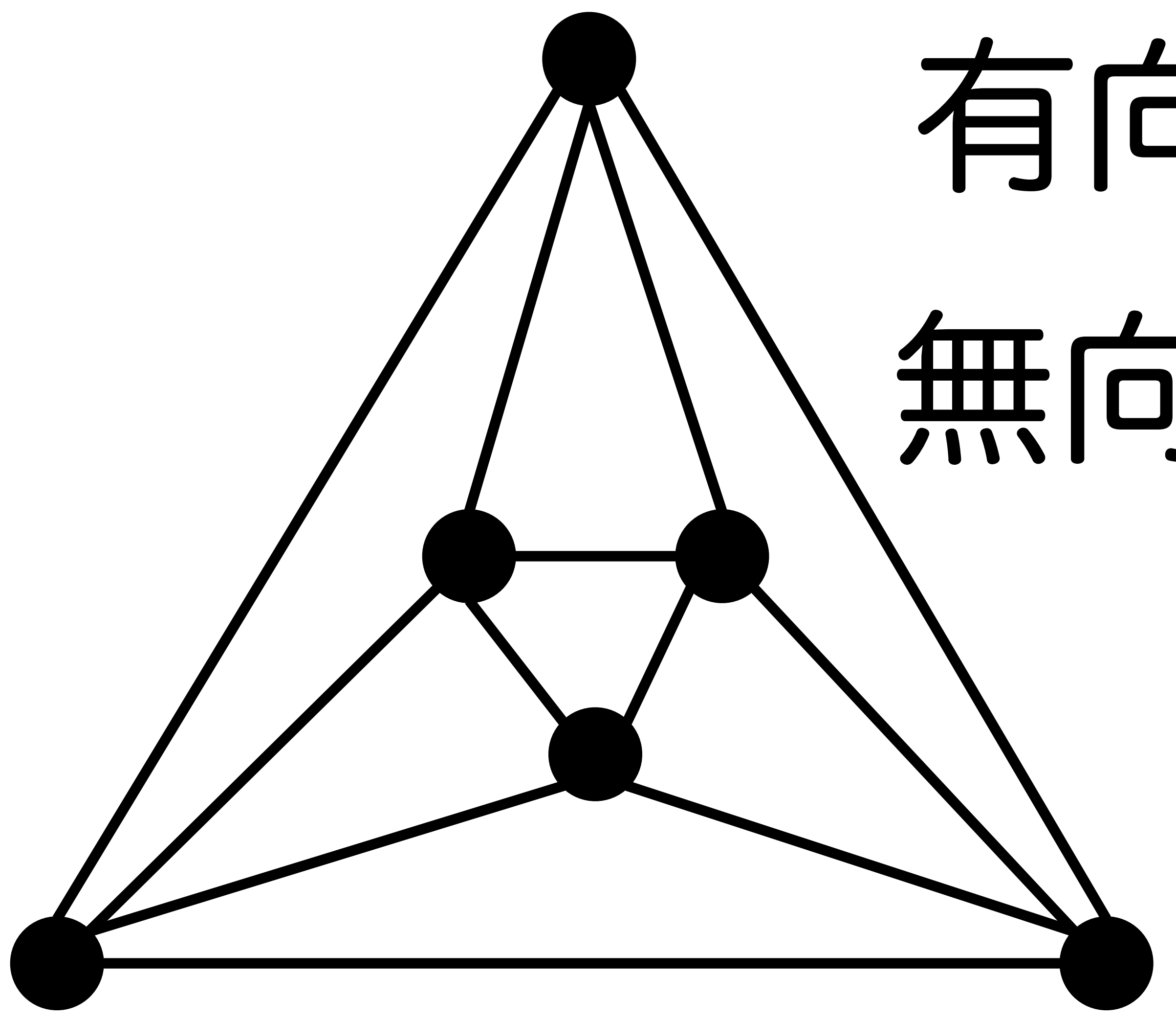


有向グラフの閉曲面への埋め込み

ある閉曲面 F に対して，有向グラフ D が次の2つを満たすように描かれているとき，D は F に**埋め込まれている**という．

・無向基礎グラフ(underlying graph)が F に埋め込まれている．

・各頂点について，その頂点を始点とする辺と終点とする辺が交互に描かれている．



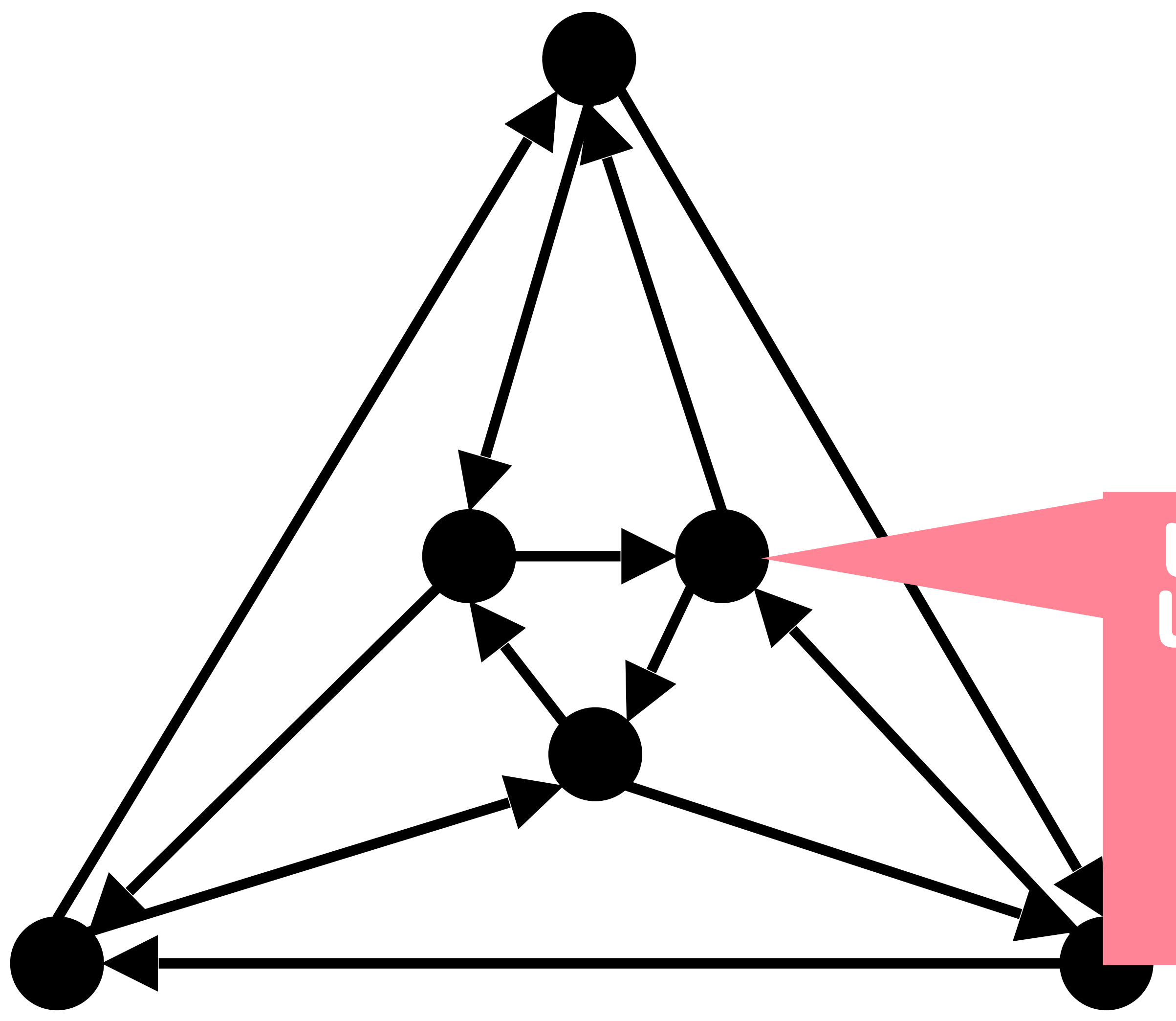
有向グラフDの無向基礎グラフ

辺の交差なく描けている！

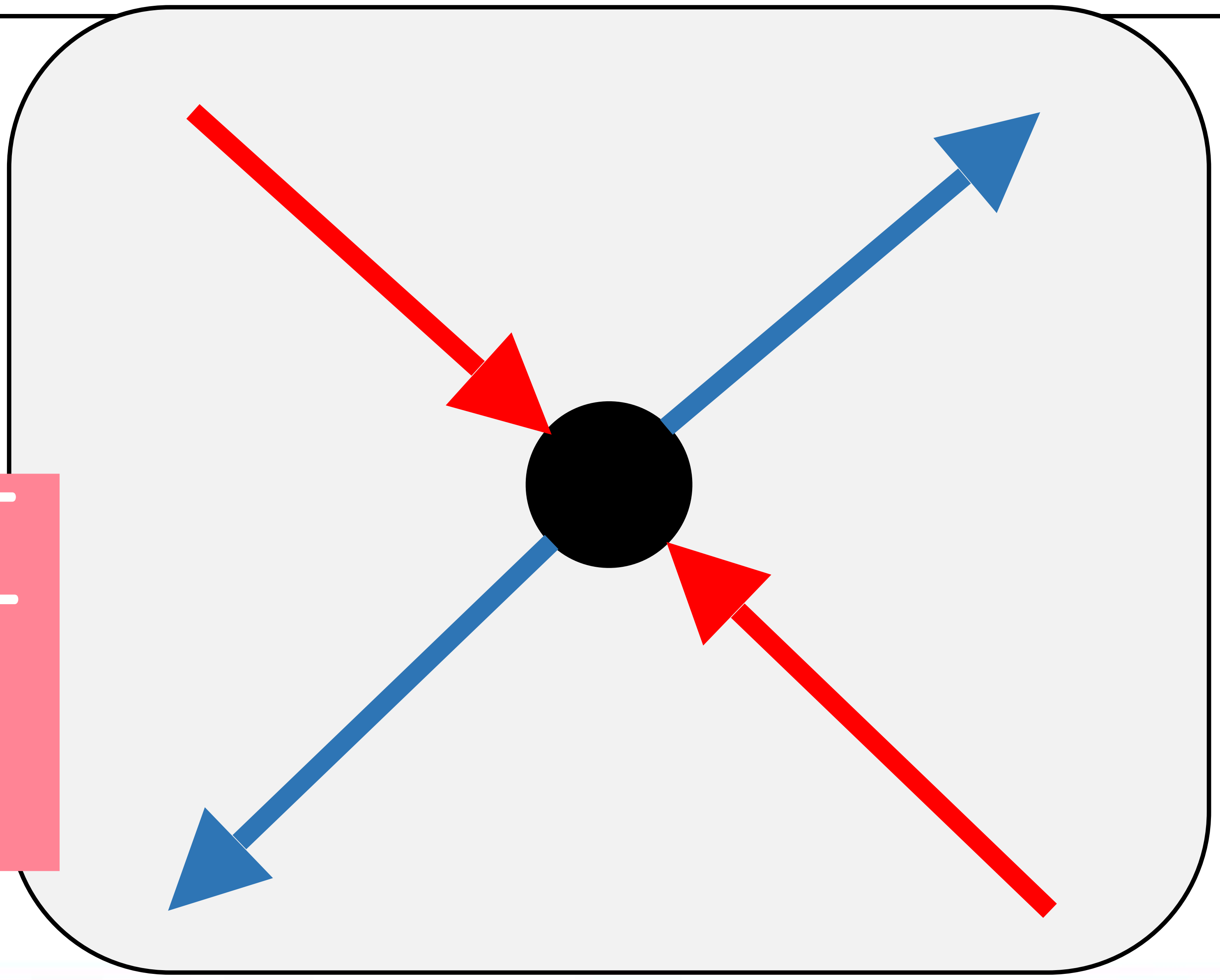
有向グラフの閉曲面への埋め込み

ある閉曲面 F に対して，有向グラフ D が次の2つを満たすように描かれているとき，D は F に埋め込まれているという．

- 無向基礎グラフ(underlying graph)が F に埋め込まれている．
- 各頂点について，その頂点を始点とする辺と終点とする辺が交互に描かれている．



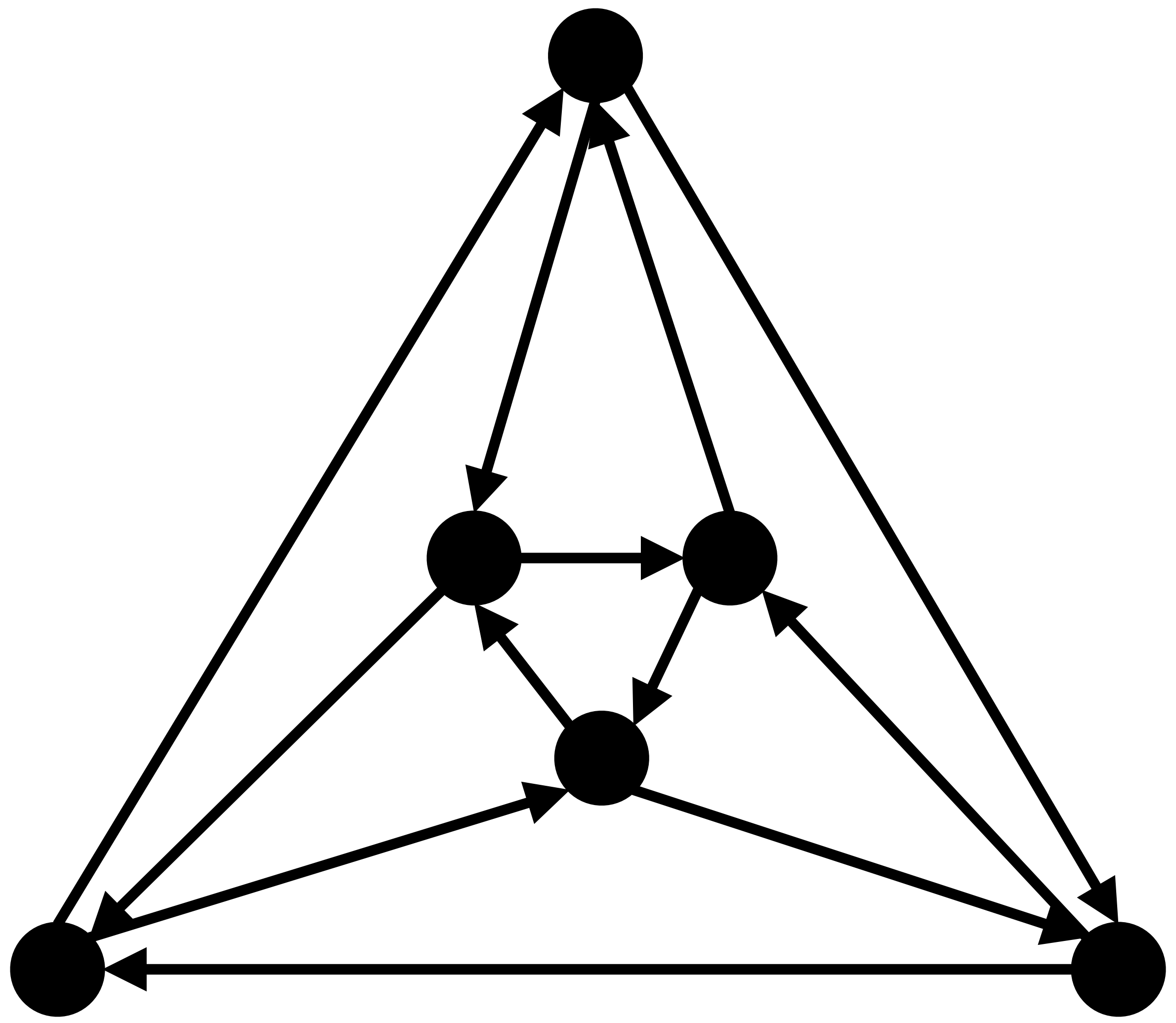
出る辺・入る辺が交互に繰り返されている



有向グラフの閉曲面への埋め込み

ある閉曲面 F に対して，有向グラフ D が次の2つを満たすように描かれているとき，D は F に埋め込まれているという．

- 無向基礎グラフ(underlying graph)が F に埋め込まれている．
- 各頂点について，その頂点を始点とする辺と終点とする辺が交互に描かれている．



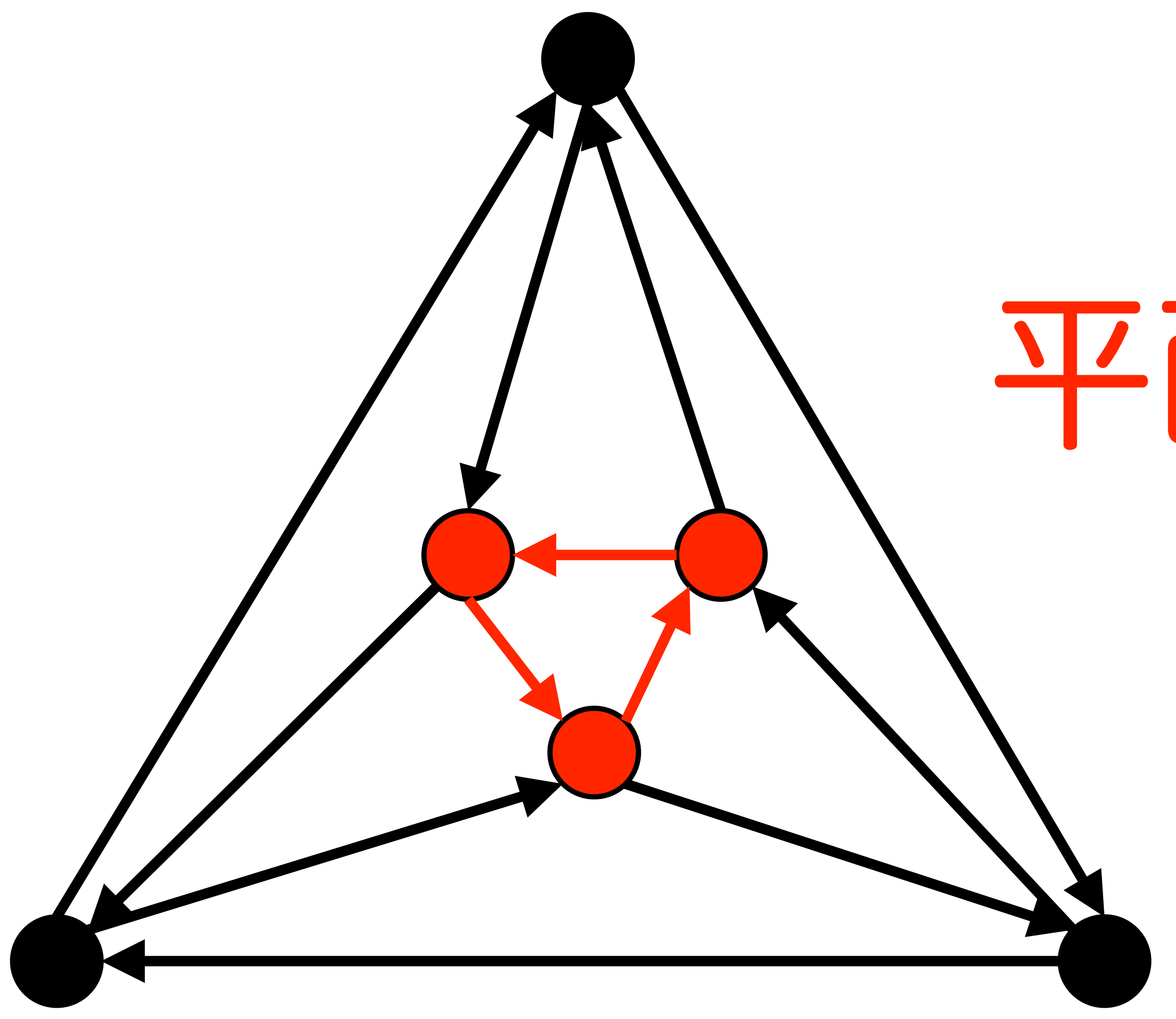
平面に埋め込まれた
有向グラフD

有向グラフの閉曲面への埋め込み

ある閉曲面 F に対して，有向グラフ D が次の2つを満たすように描かれているとき，D は F に埋め込まれているという．

・無向基礎グラフ(underlying graph)が F に埋め込まれている．

・各頂点について，その頂点を始点とする辺と終点とする辺が交互に描かれている．

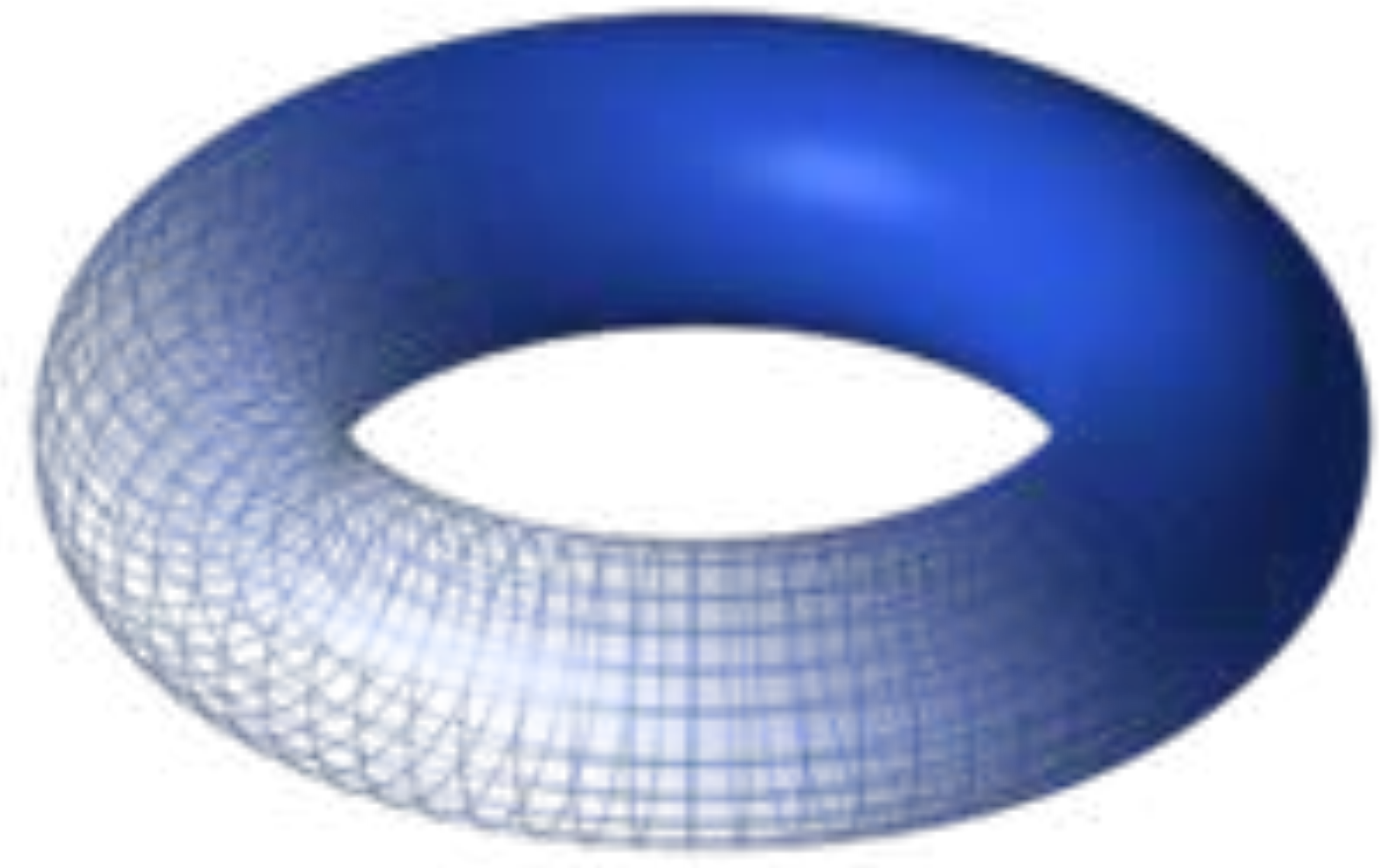


平面に埋め込まれていない

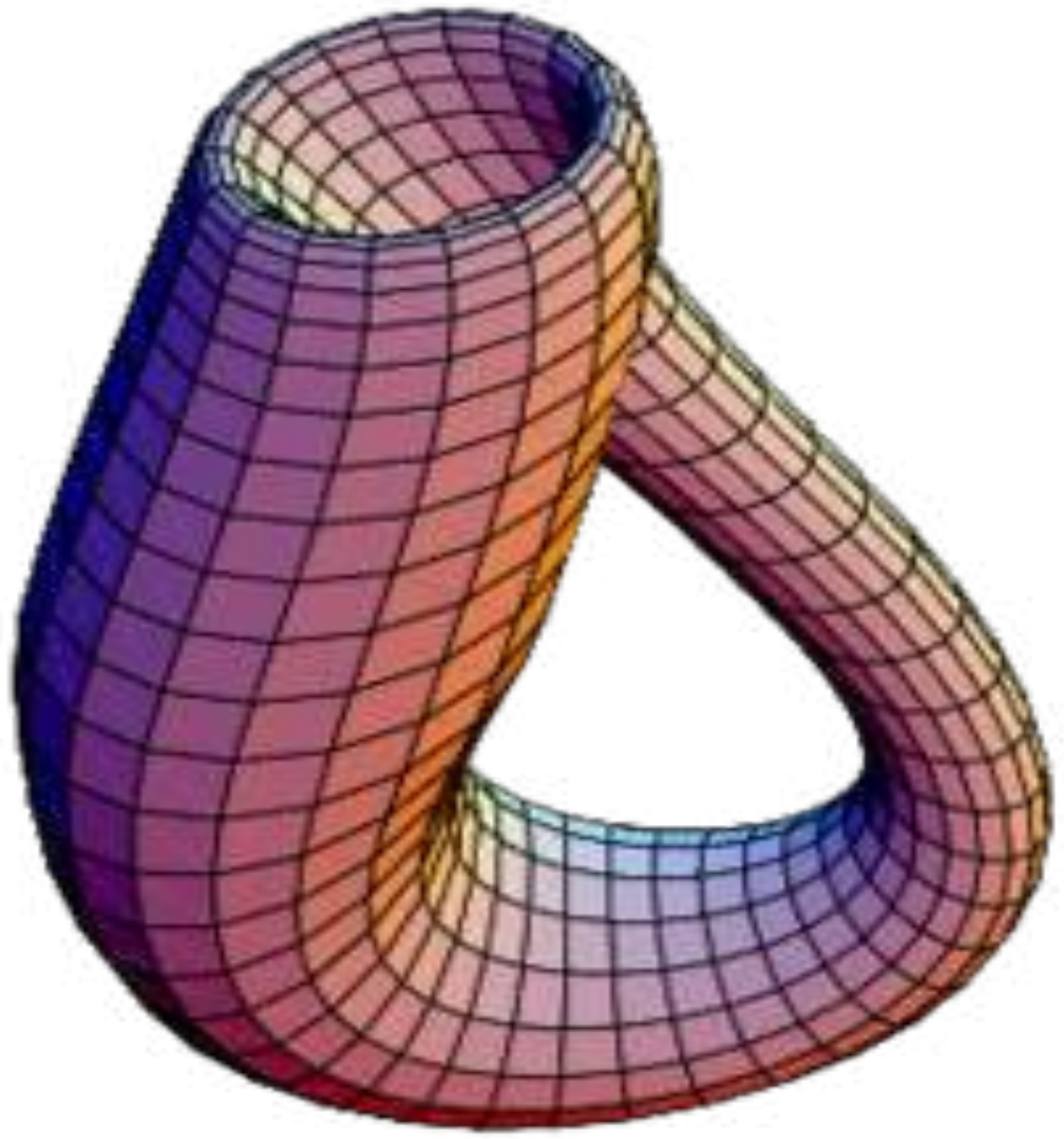
有向グラフD

有向グラフの閉曲面への埋め込み

トーラス



クラインの壷

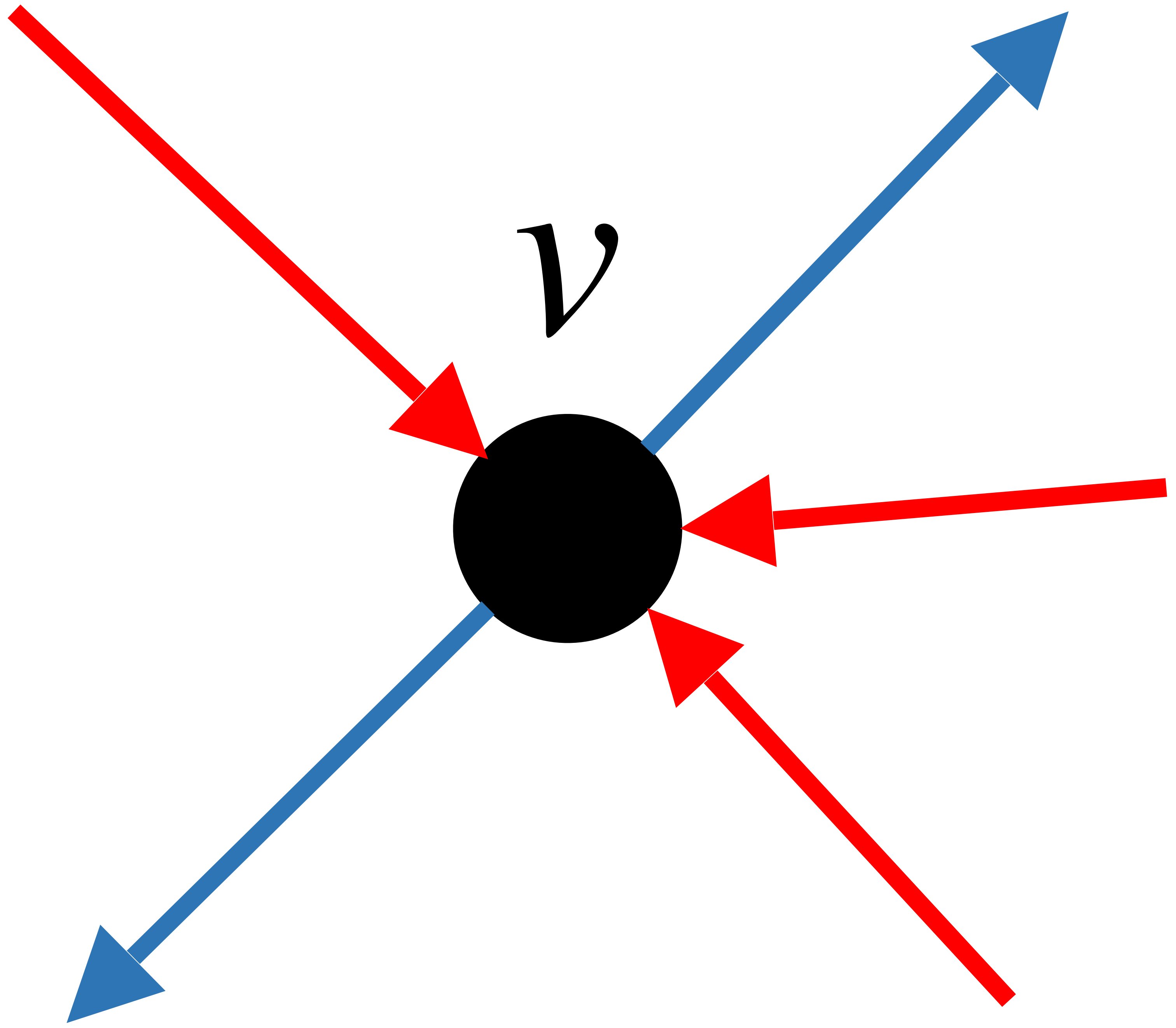


どのような有向グラフが埋め込み可能か？

有向グラフの閉曲面への埋め込み

Observation 1.

有向グラフ D に出次数と入次数が一致しない点が存在するとき，任意の閉曲面において D の埋め込みは存在しない.



これ以降、扱う有向グラフは

$deg^{+}(v) = deg^{-}(v)$となるグラフ

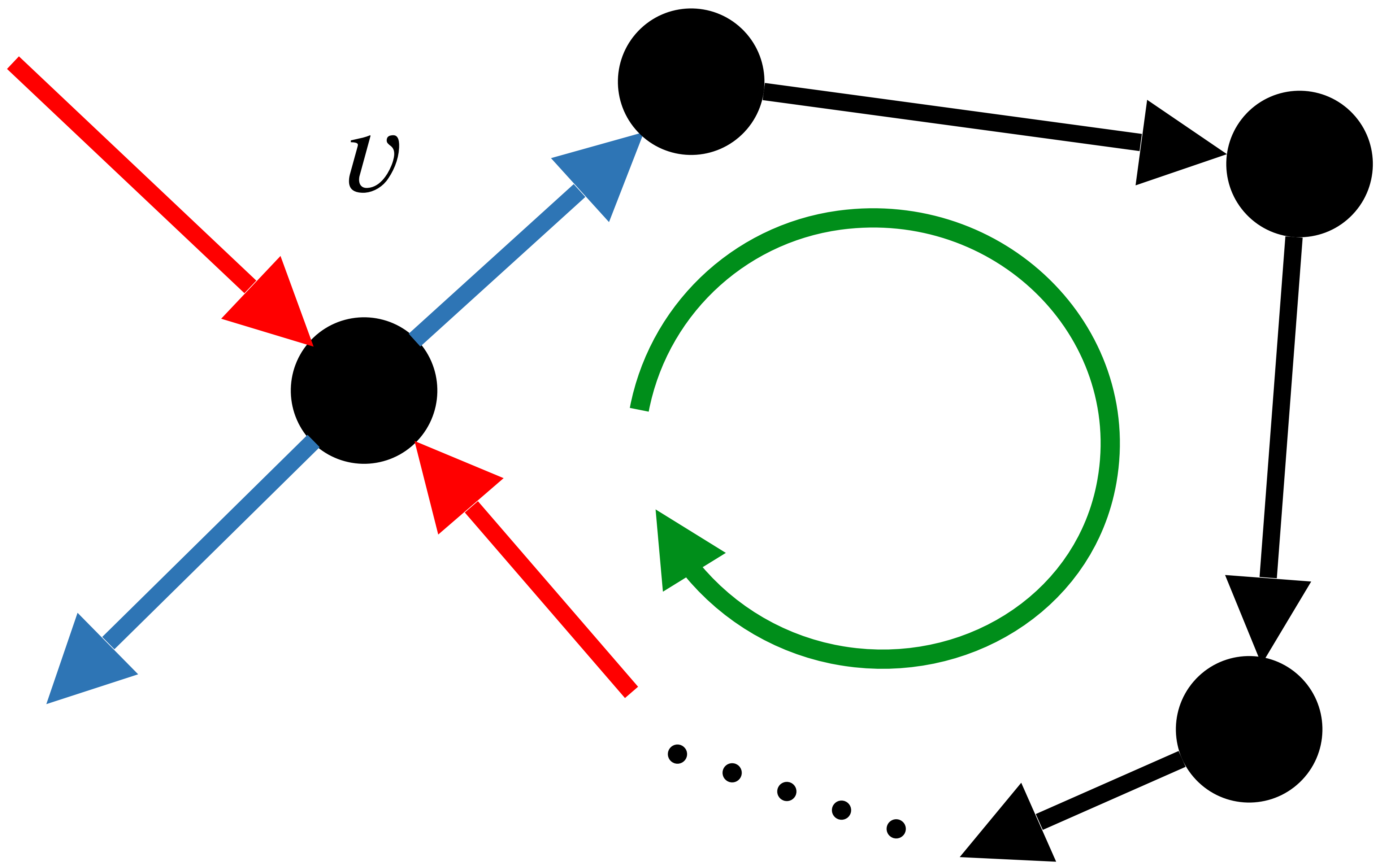
（正則有向グラフ, Regular digraph）

とする。

有向グラフの閉曲面への埋め込み

Observation 2.

閉曲面 F に埋め込まれた有向グラフ D の各面は有向閉路となる.



有向グラフの閉曲面への埋め込み

Observation 2.

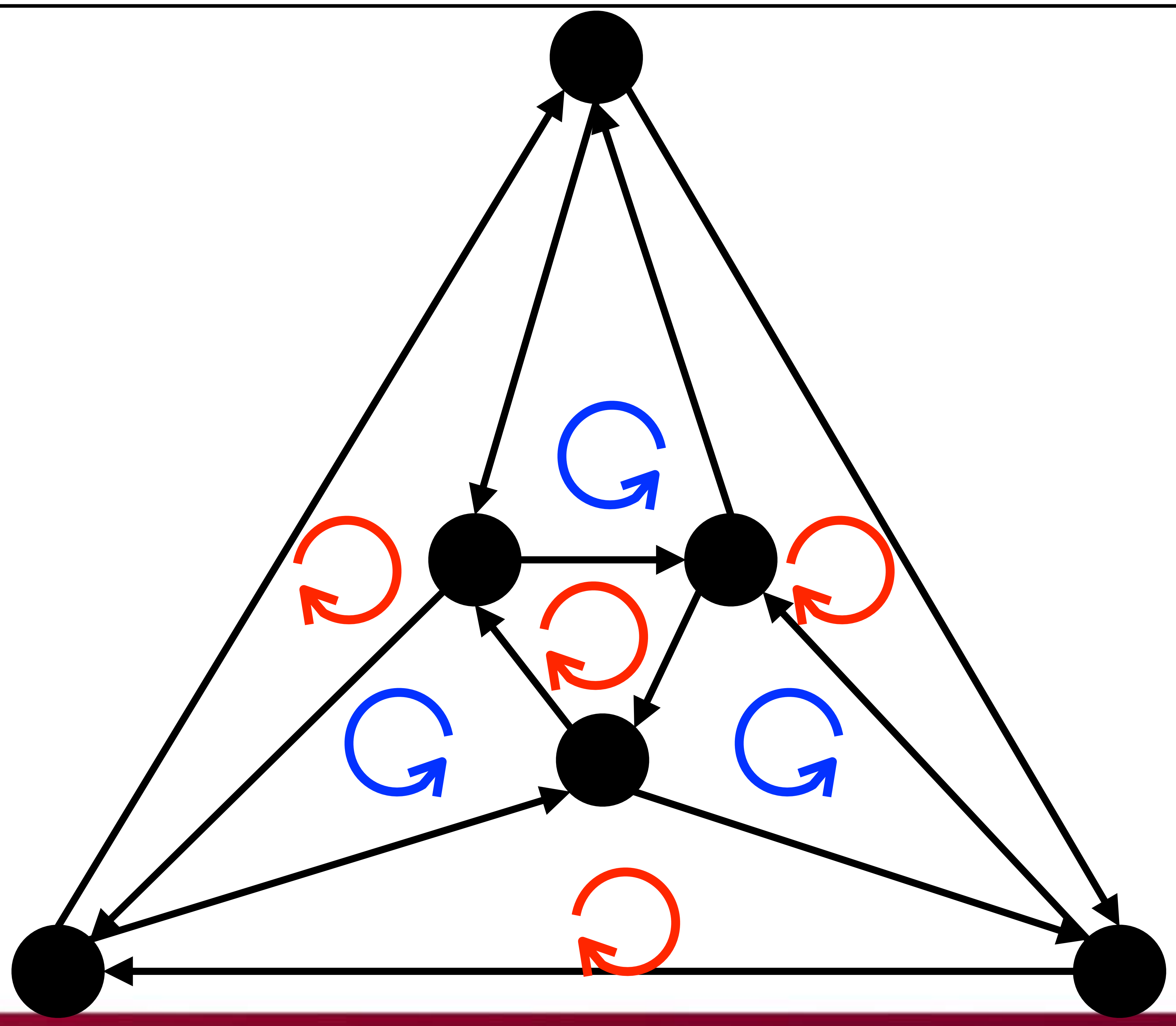
閉曲面 F に埋め込まれた有向グラフ D の各面は有向閉路となる.

Observation 3.

閉曲面 F に有向グラフ D が埋め込み可能であることと, F において D (の無向基礎グラフ)がface 2-colorableであることは同値である.

Observation 3.

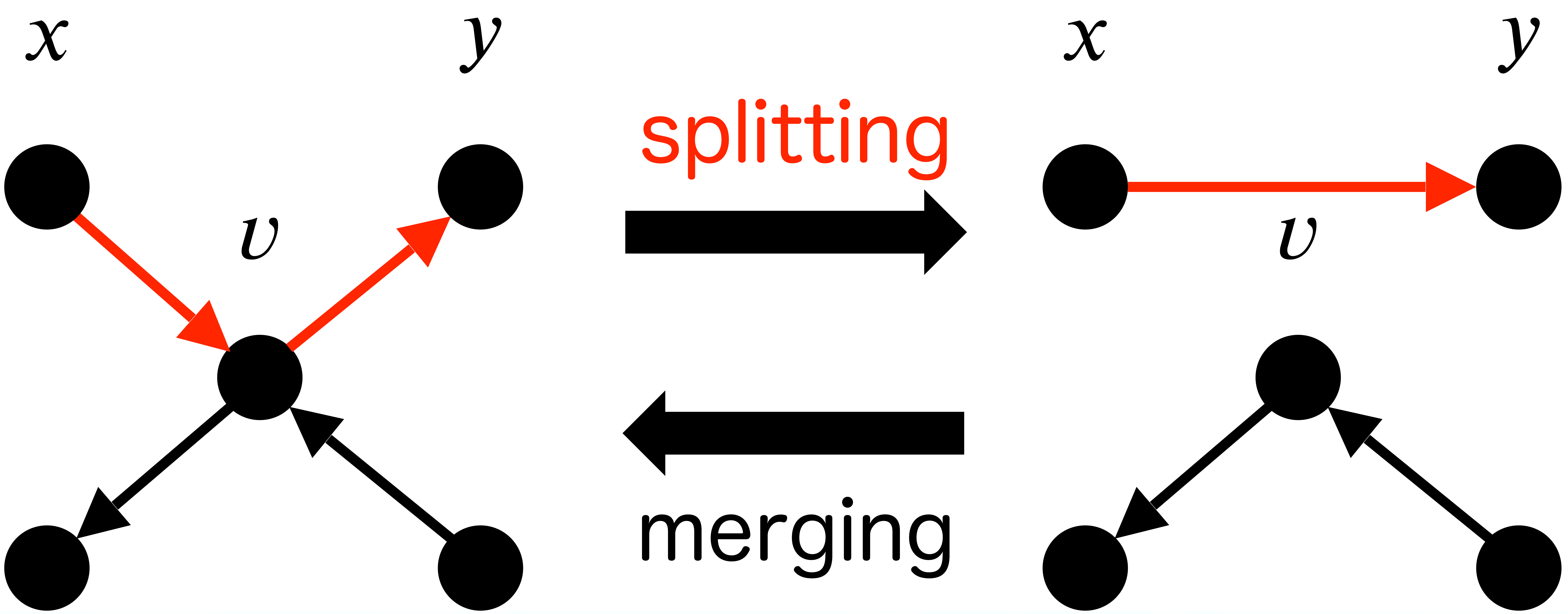
閉曲面 F に有向グラフ D が埋め込み可能であることと，F において D (の無向基礎グラフ)がface 2-colorableであることは同値である.



有向グラフの埋め込みの性質を保存する局所変形

Definition (Splitting).

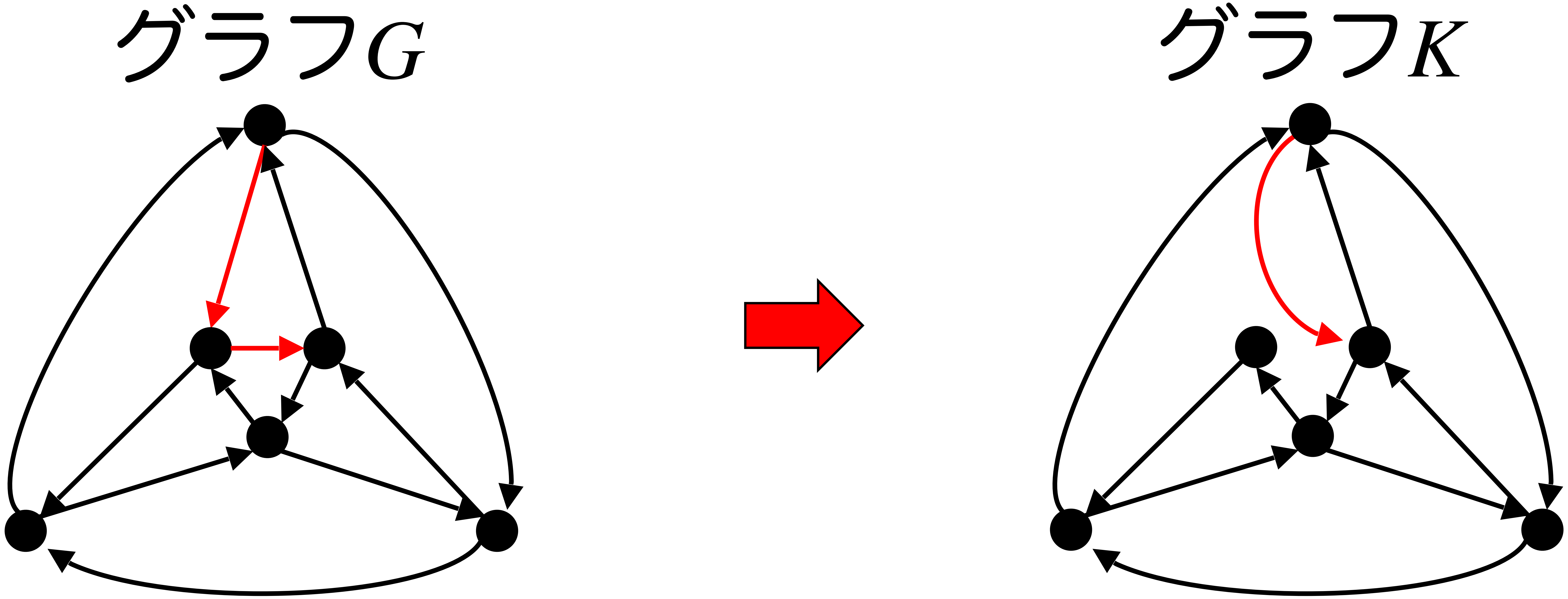
有向グラフにおける頂点 v の splitting とは，有向辺$\{x, v\}, \{v, y\}$を除去し，新たな有向辺$\{x, y\}$を加える操作.



有向グラフの埋め込みの性質を保存する局所変形

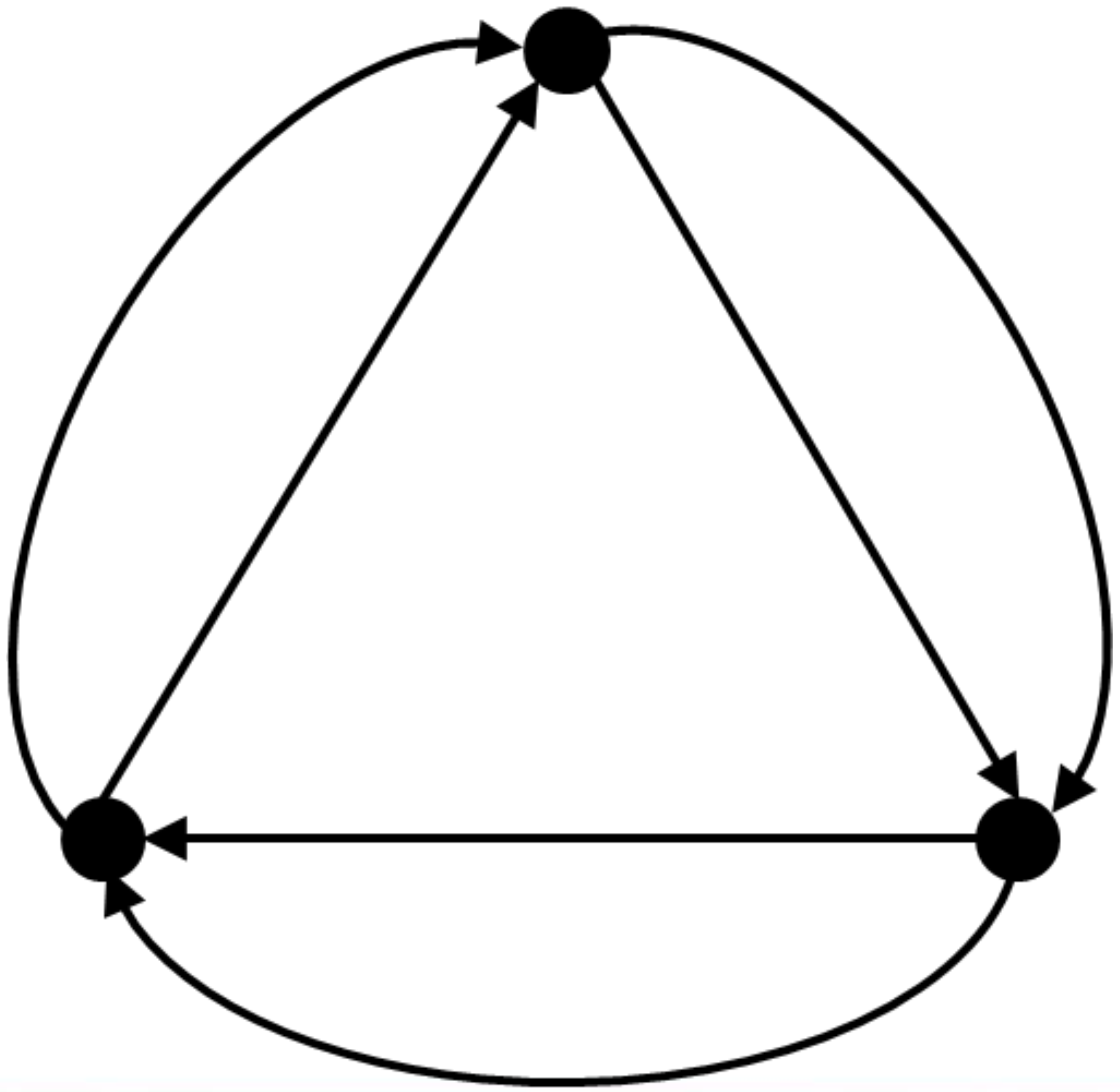
Definition (Immersion).

有向グラフ K が有向グラフ G からsplittingを繰り返して得られるグラフであるとき，K は G のimmersionと呼ぶ．



Theorem C (Johnson).

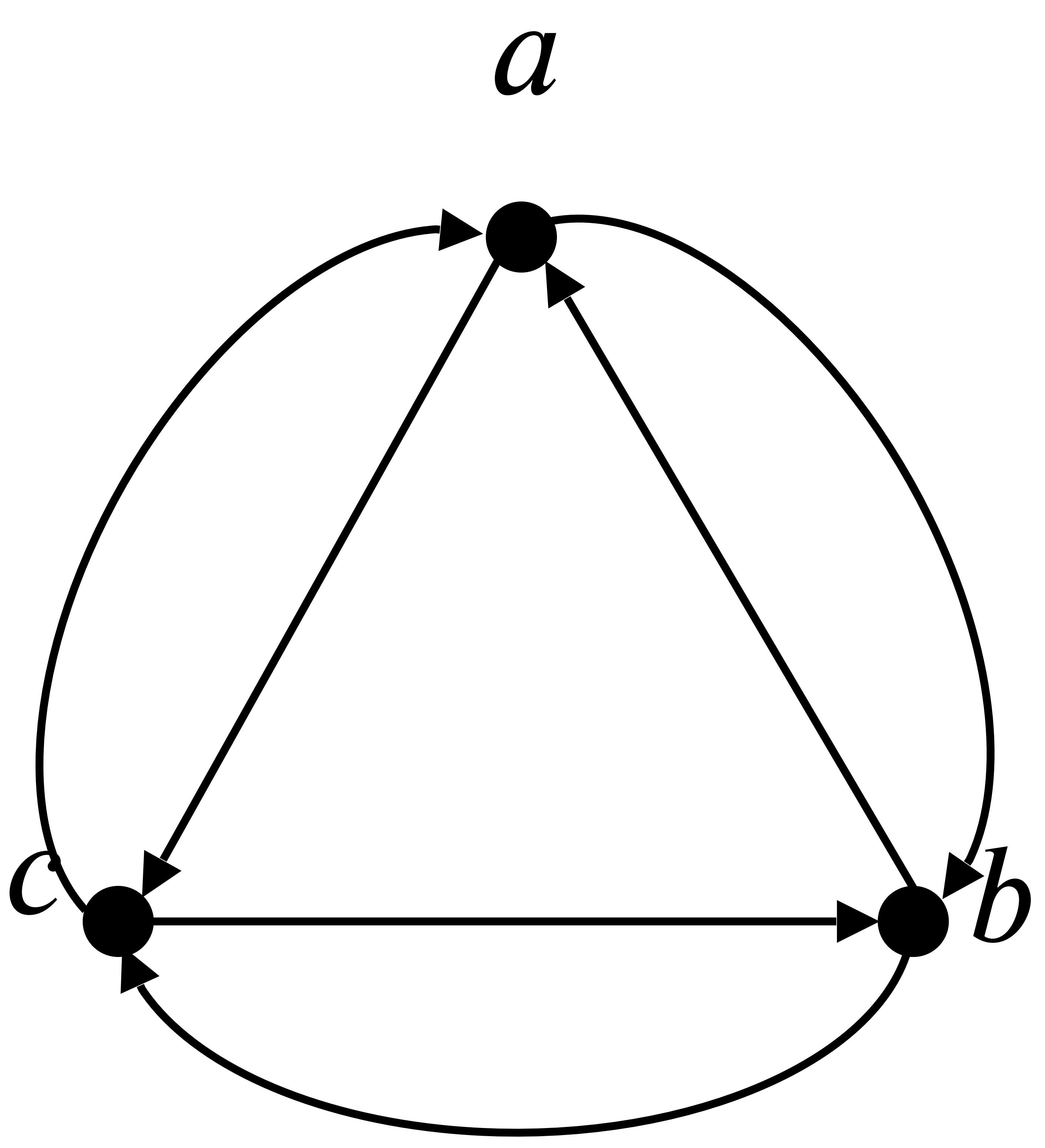
2-正則有向グラフ D が平面埋め込み可能である必要十分条件は D が$C_3^{(2)}$をimmersionとして含まないことである.



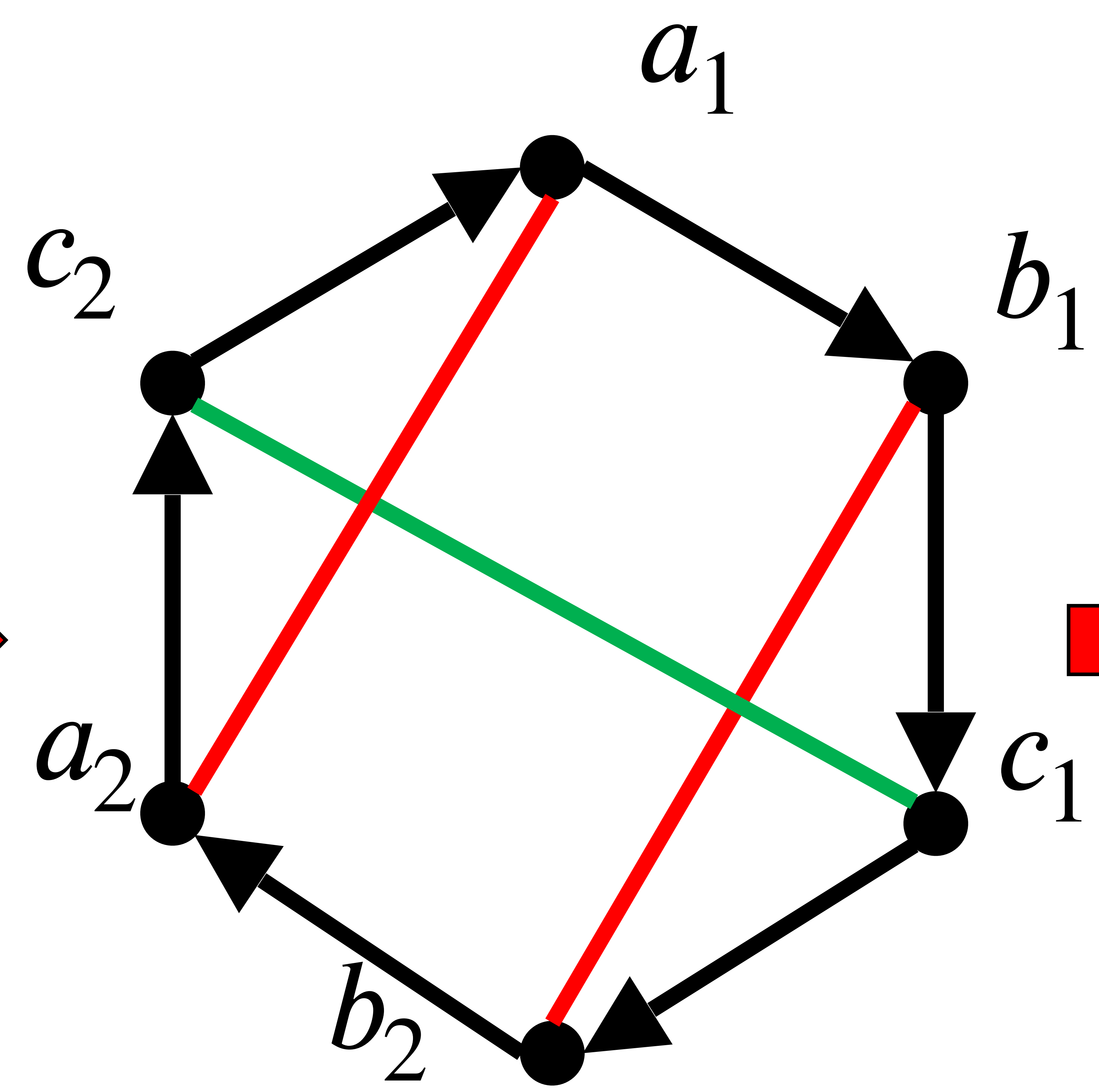
$: C_3^{(2)}$

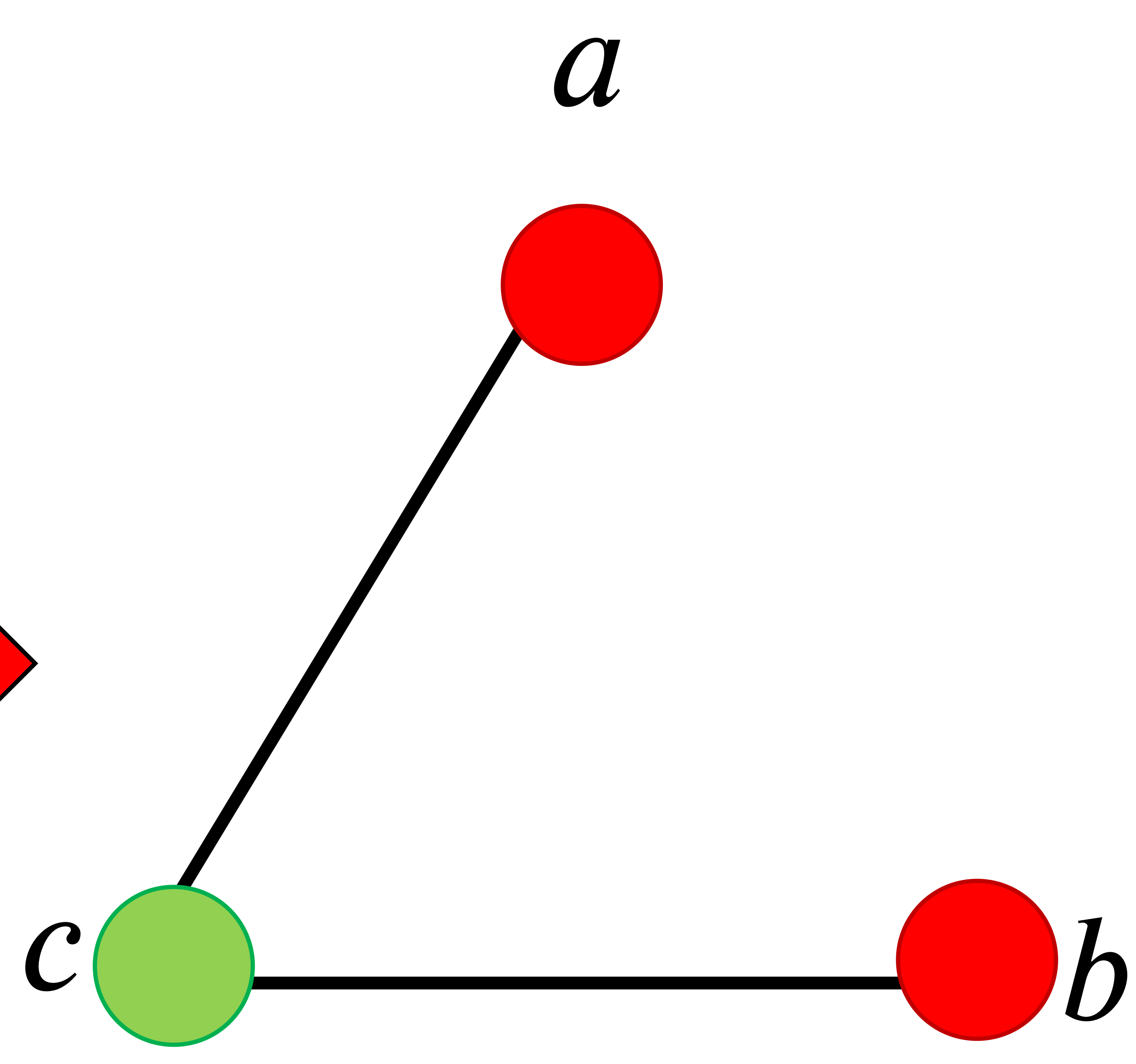
証明のアイデア
(平面埋め込み可能性の判定)

Note.
Circle graphが2部グラフ
↔Dは平面埋め込み可能



平面埋め込み可能な例

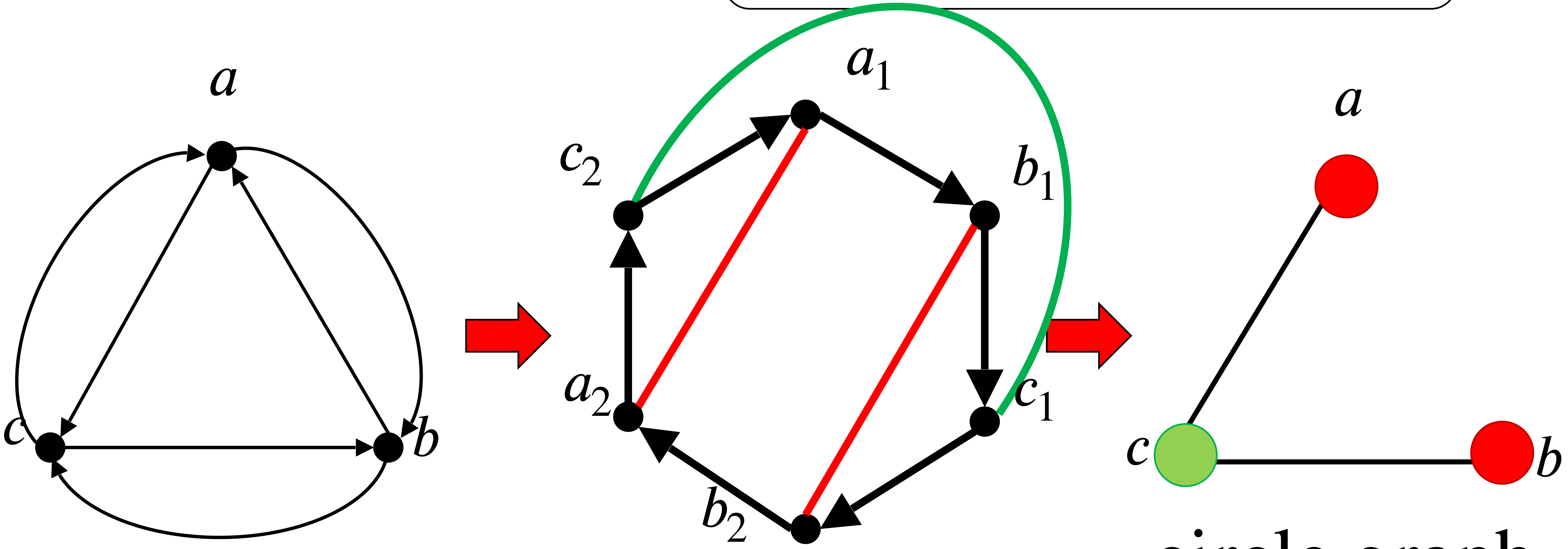




circle graph

証明のアイデア
(平面埋め込み可能性の判定)

Note.
Circle graphが2部グラフ
$\leftrightarrow D$は平面埋め込み可能

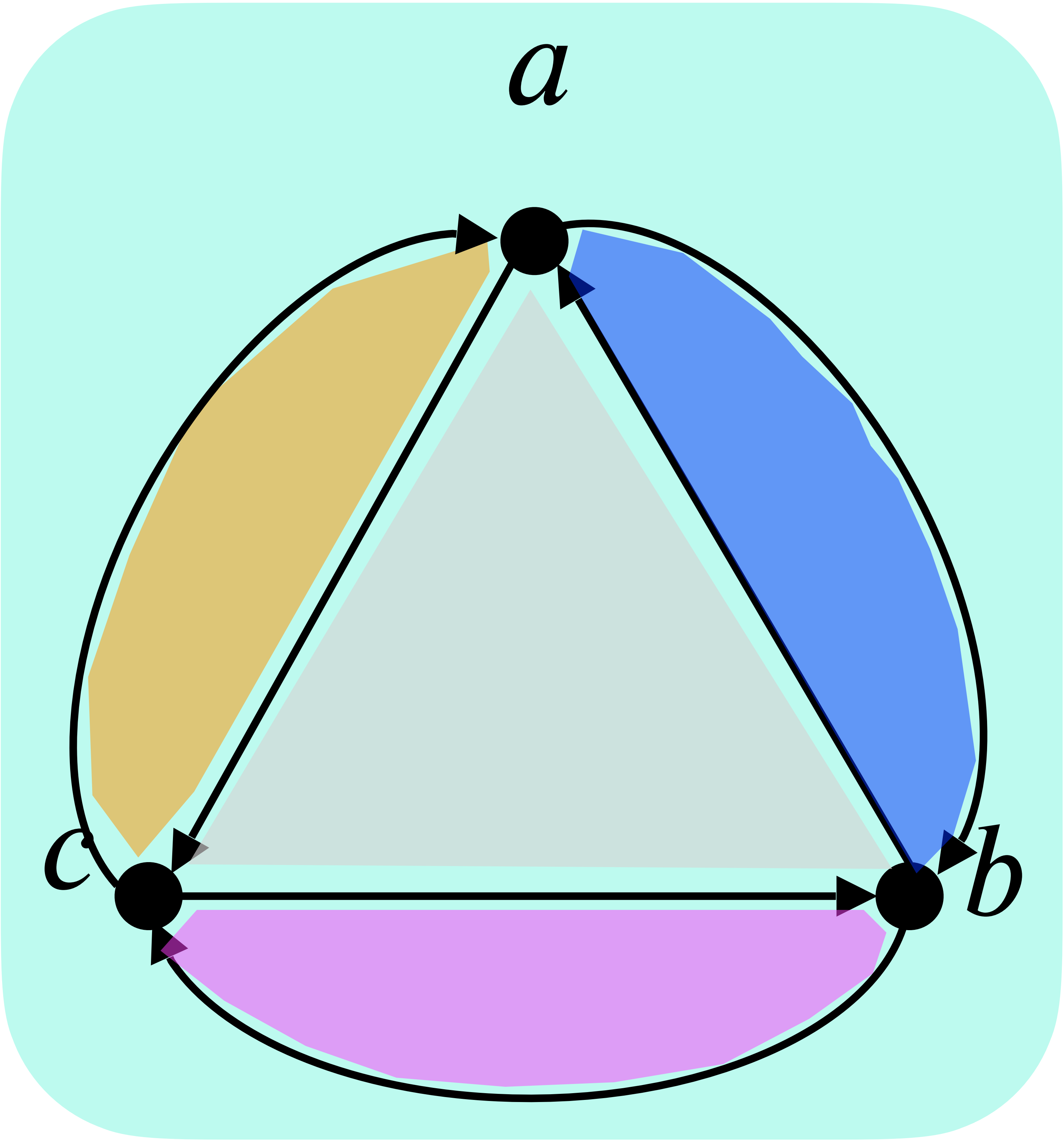


平面埋め込み可能な例

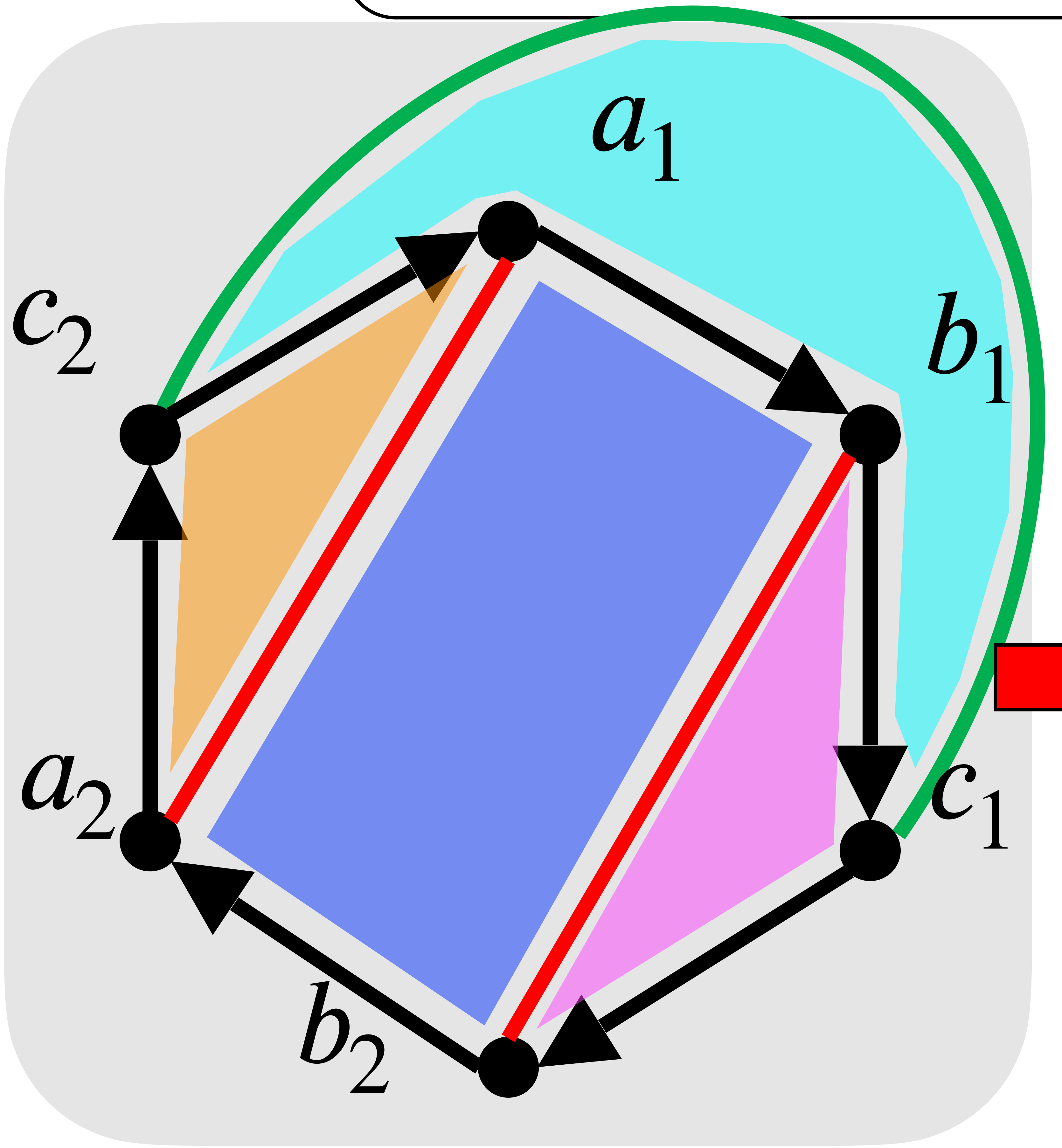
circle graph

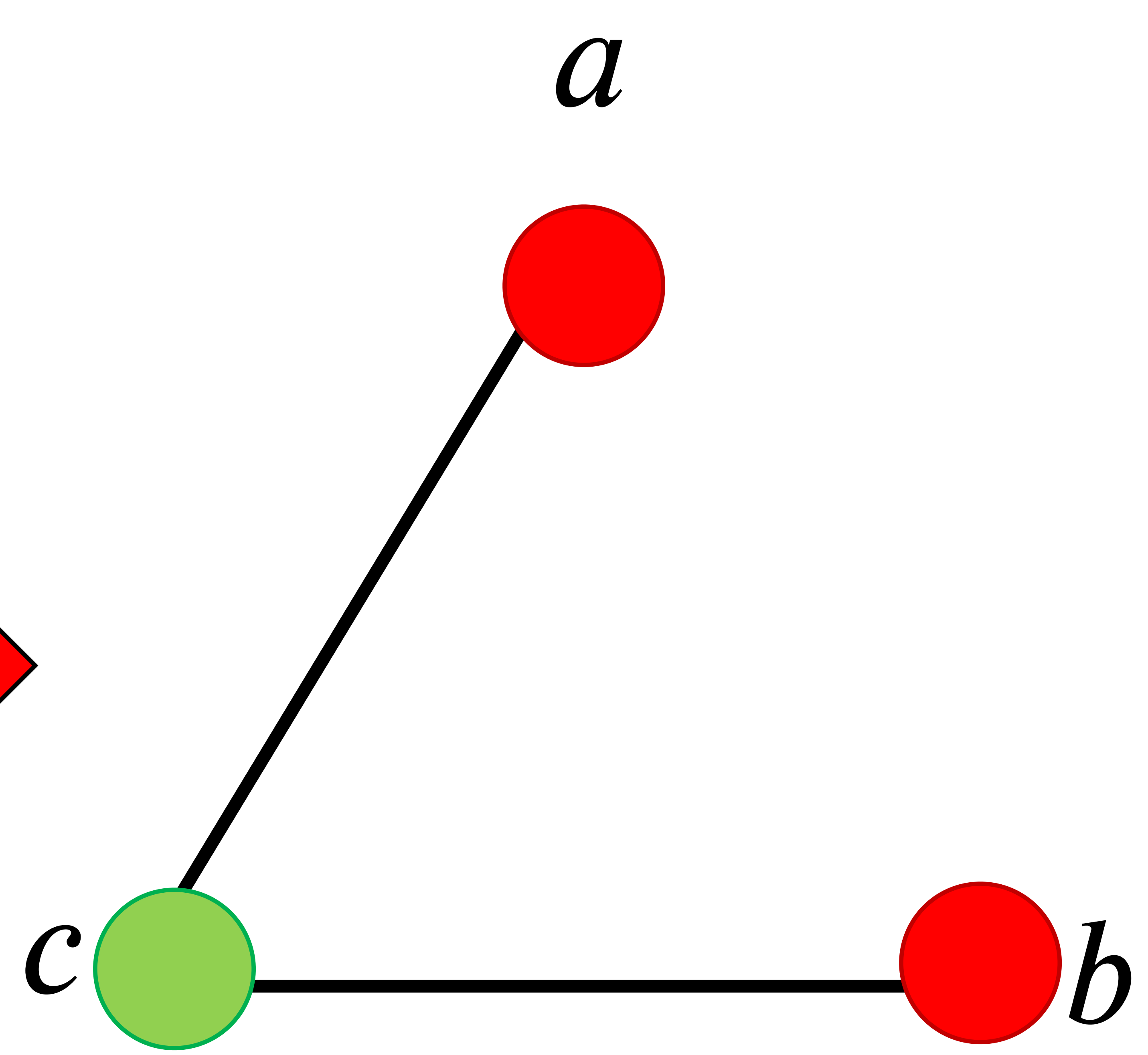
証明のアイデア
(平面埋め込み可能性の判定)

Note.
Circle graphが2部グラフ
↔Dは平面埋め込み可能



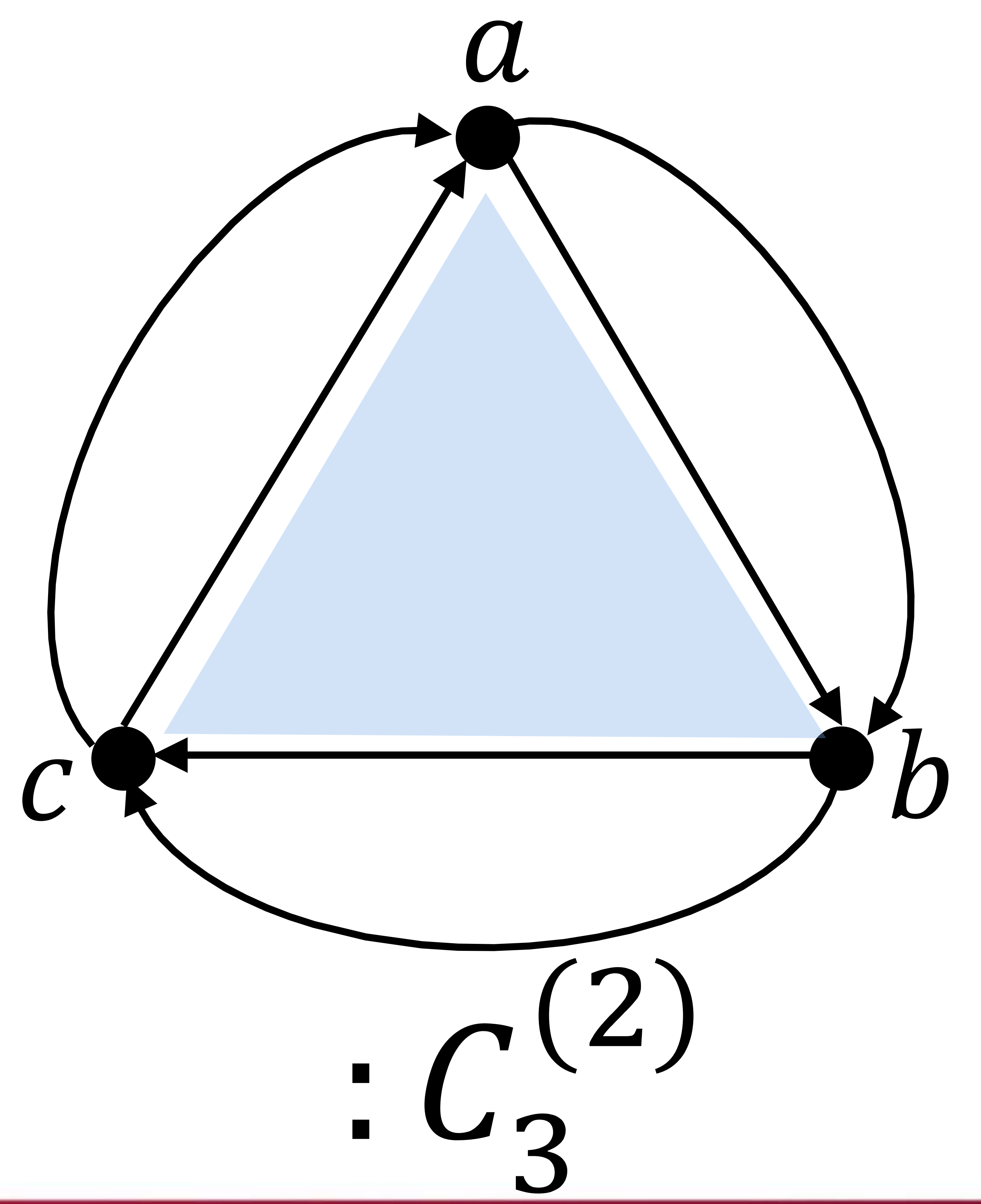
平面埋め込み可能な例

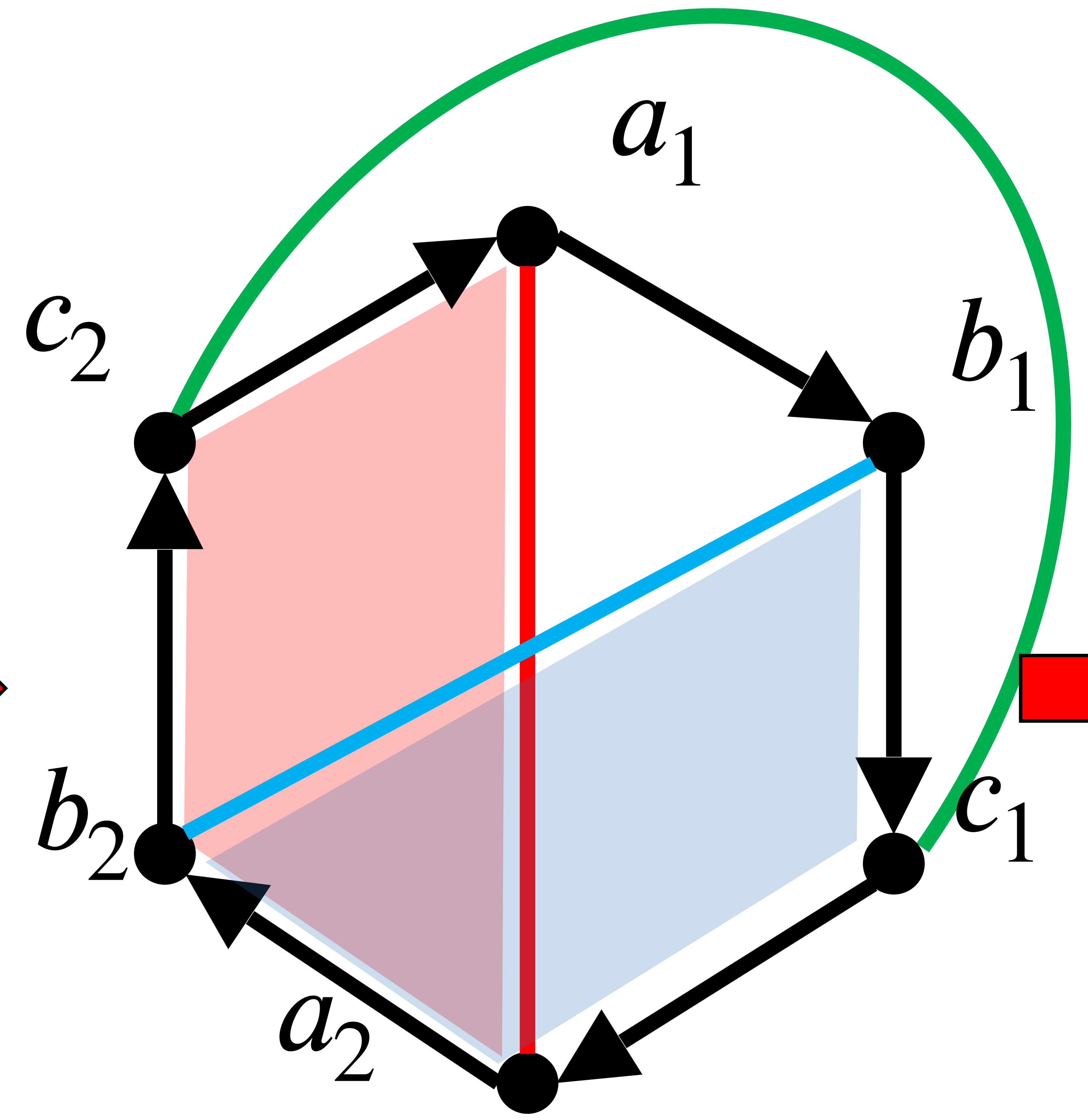


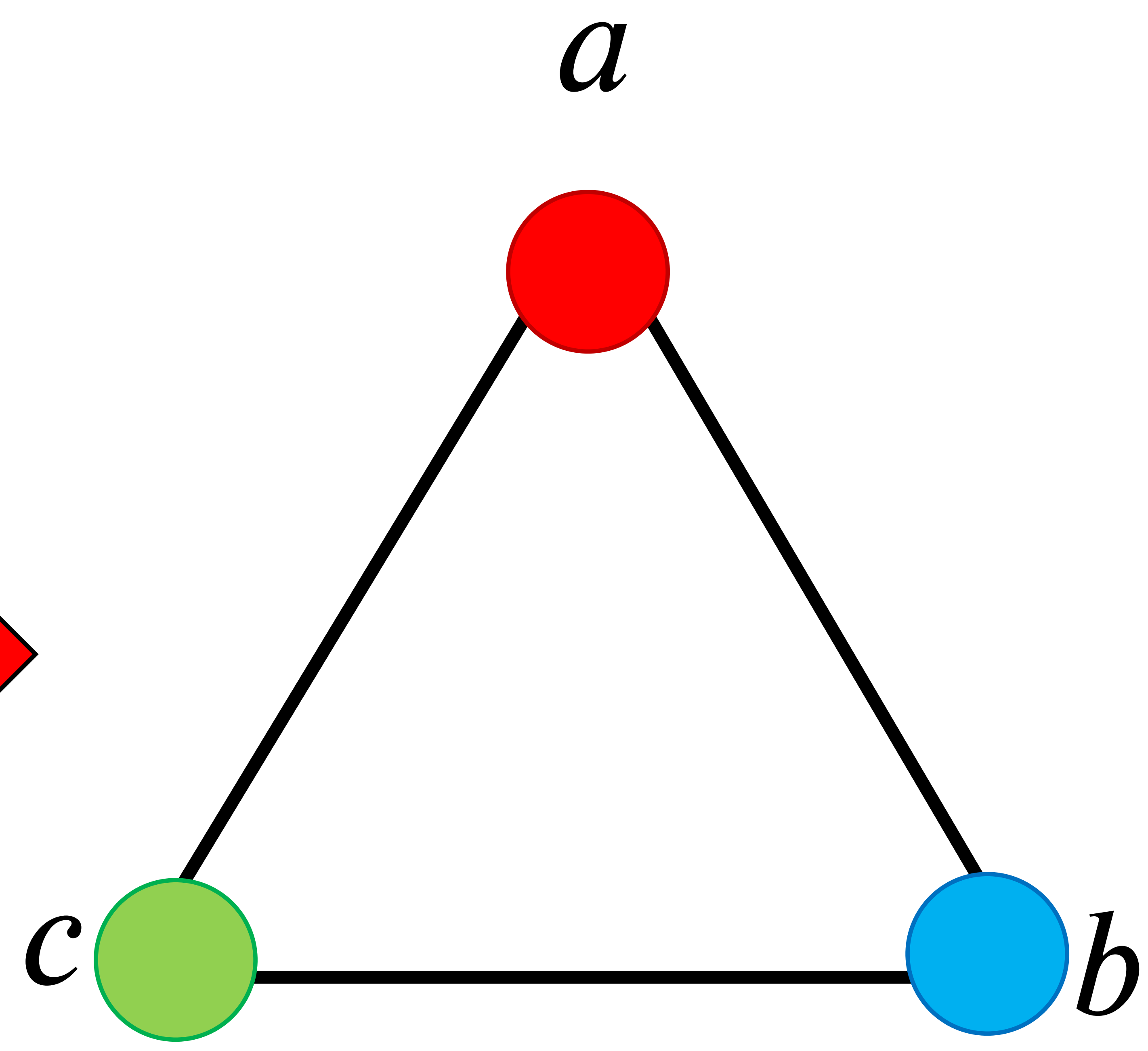


circle graph

一方で$C_3^{(2)}$の場合は…







一方で$C_3^{(2)}$の場合は…

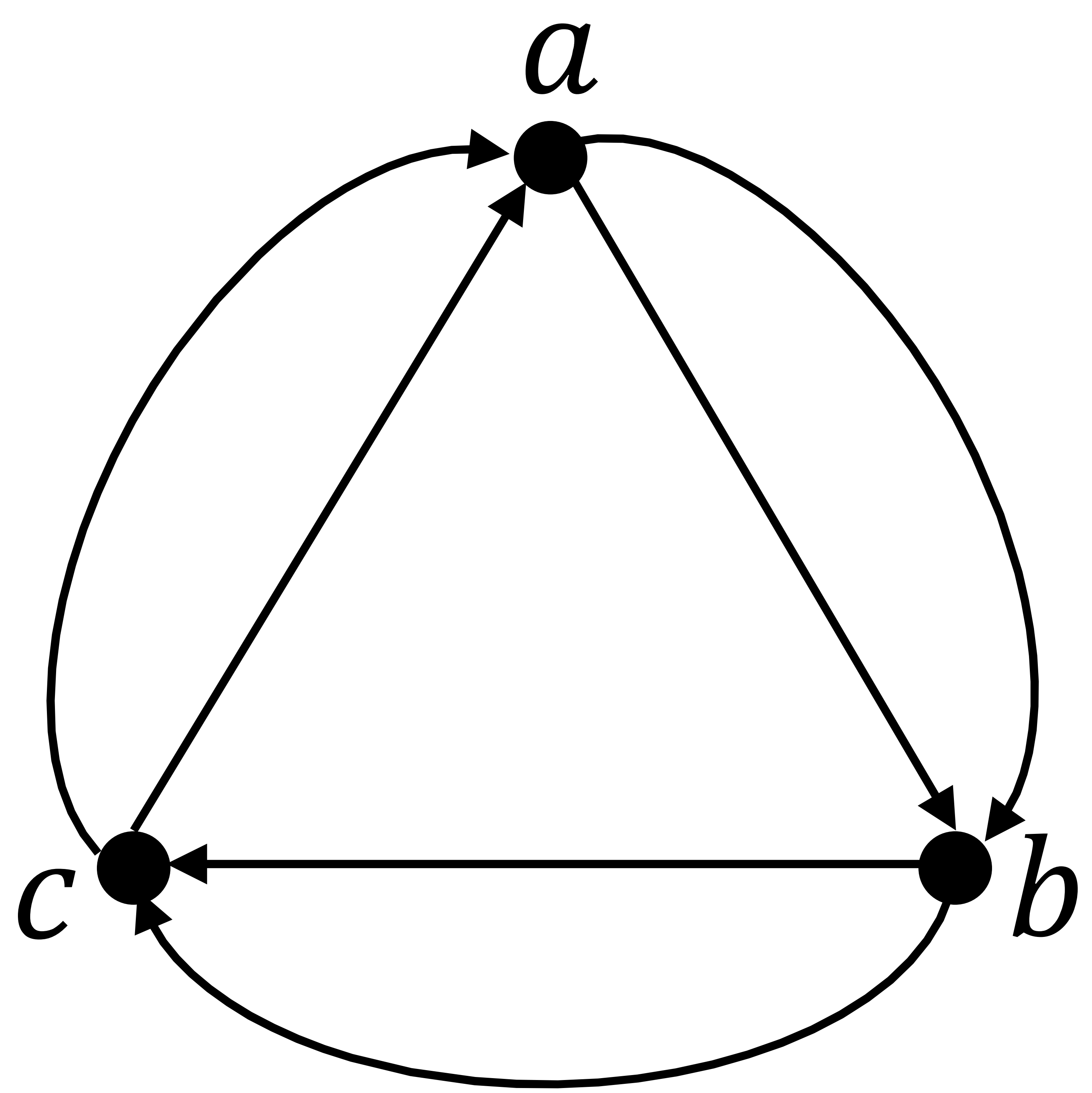
: $C_3^{(2)}$

circle graph

証明のアイデア

Lemma D.

$C_3^{(2)}$は平面埋め込み不可能である.



$: C_3^{(2)}$

Observation 2(再掲).

閉曲面 F に埋め込まれた有向グラフ D の各面は有向閉路となる. (今回は3角形)

Observation 2'.

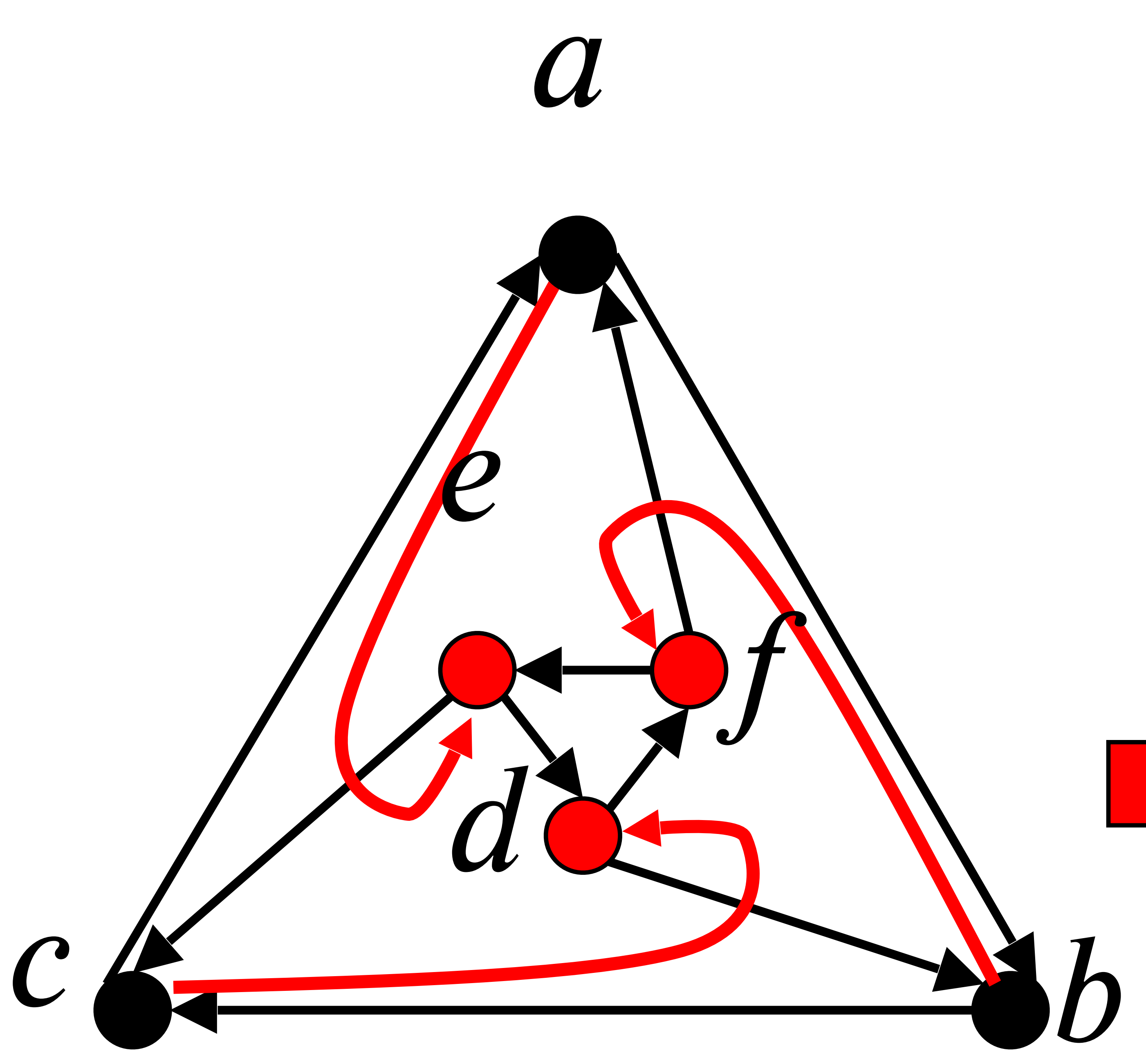
閉曲面 F に埋め込まれた有向グラフ D の各辺は2つの有向閉路に含まれるとなる.

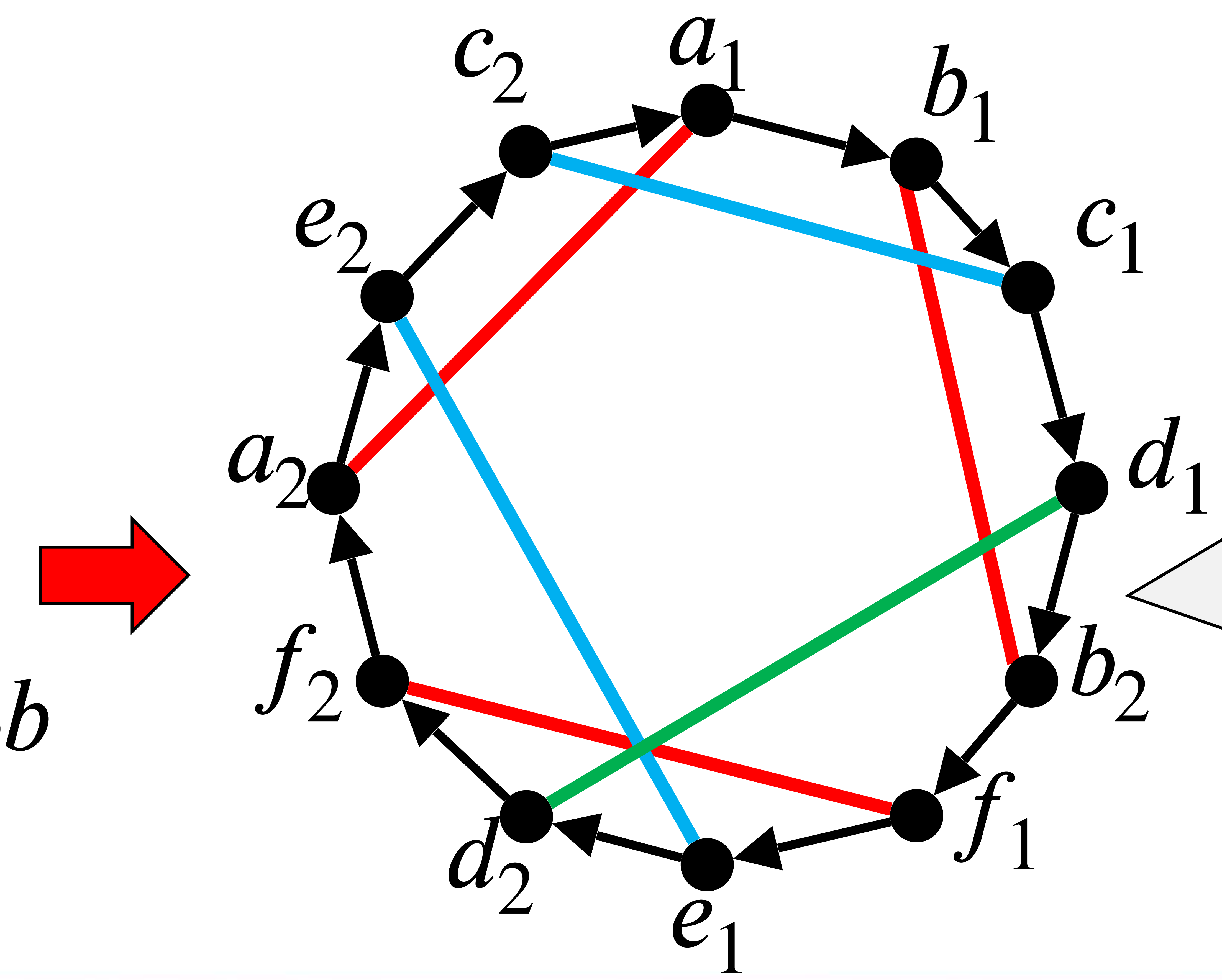
$$\Rightarrow V - E + F \leq 3 - 6 + \frac{12}{3} = 1$$

実際にやってみると

Lemma E.

平面埋め込み不可能な正則有向グラフは$C_3^{(2)}$をimmersionとして含む.



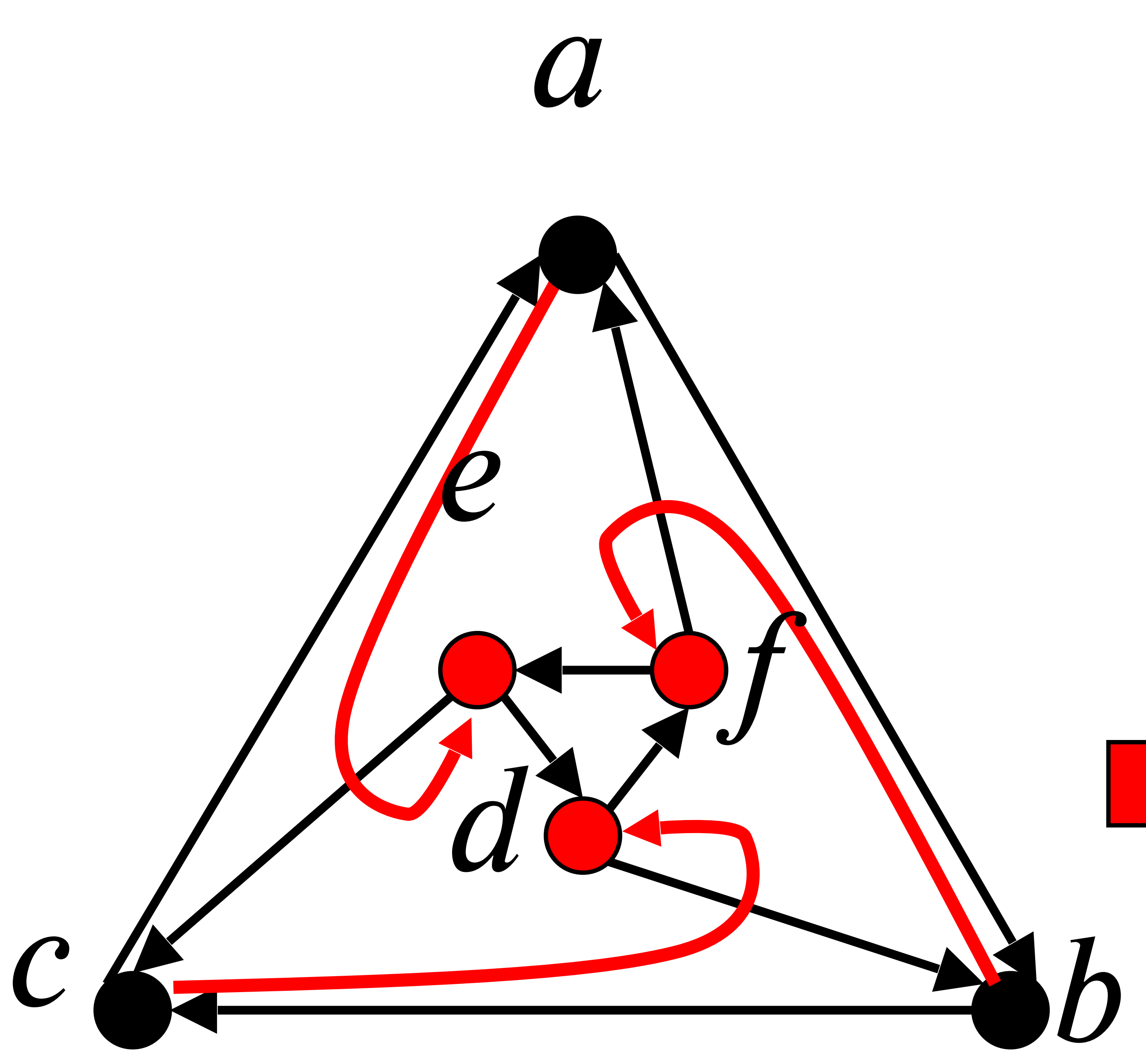


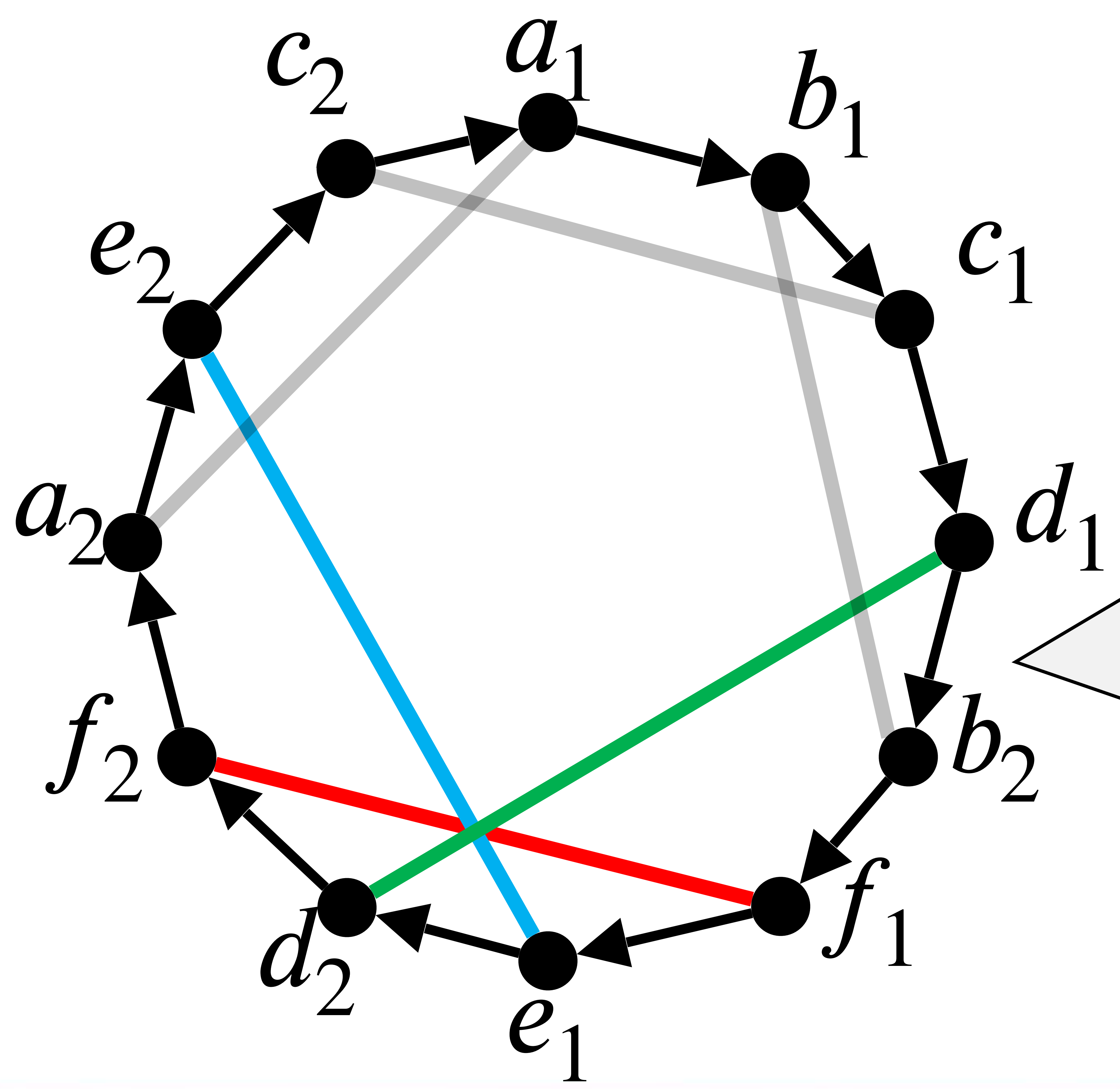
Circle graphが
非２部的に
なるようなもの

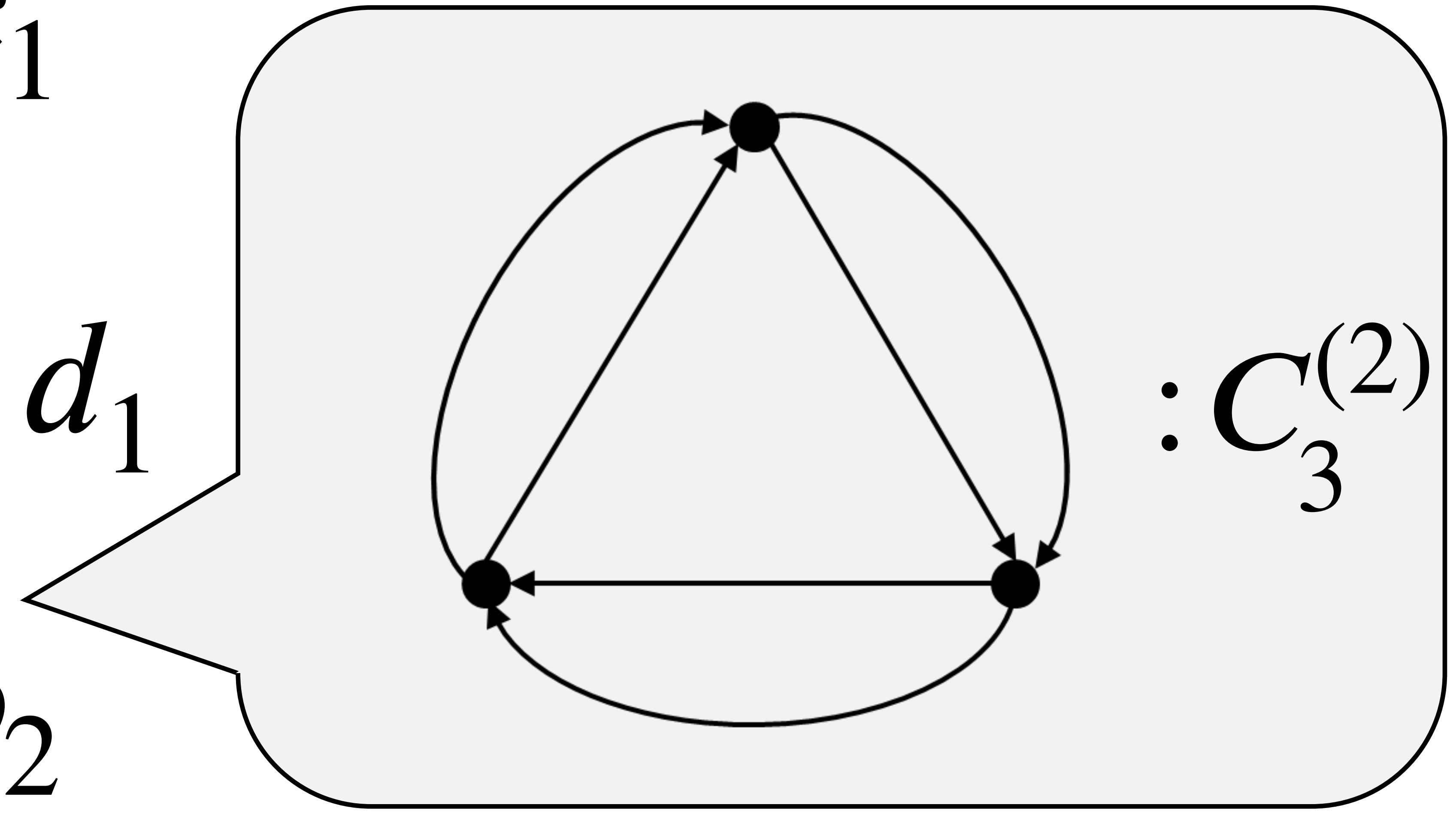
実際にやってみると

Lemma E.

平面埋め込み不可能な正則有向グラフは$C_3^{(2)}$をimmersionとして含む.

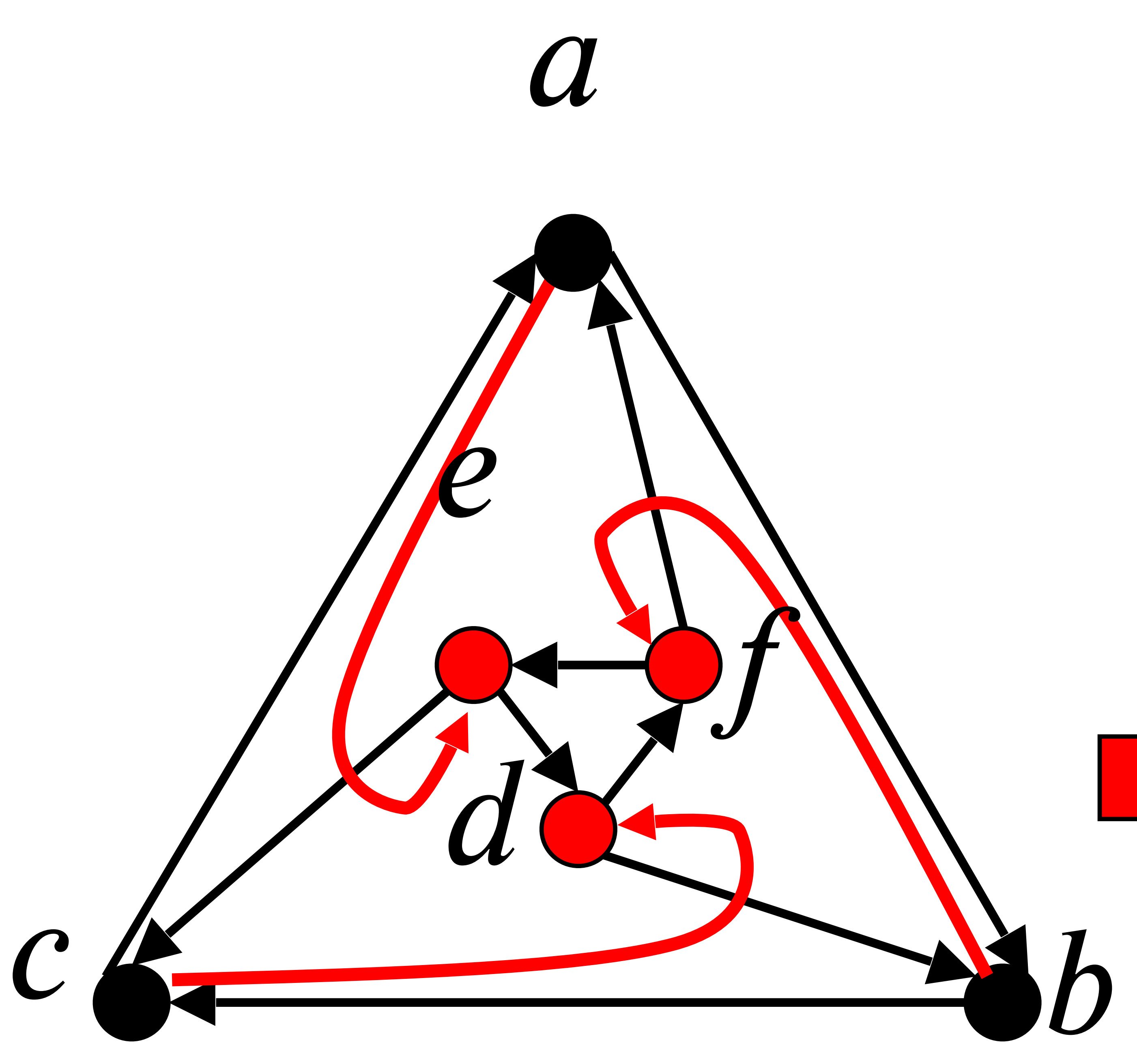


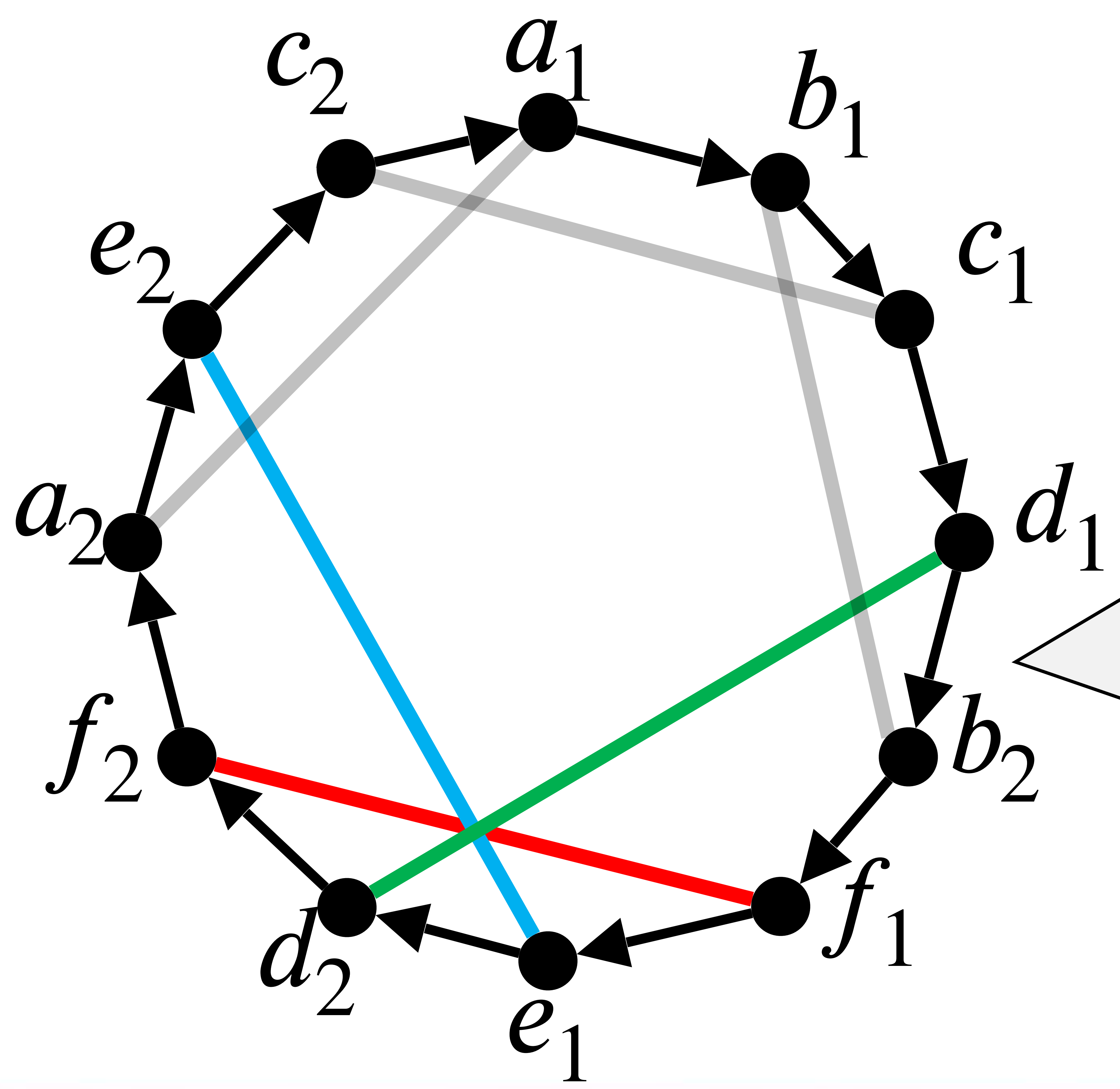




実際にやってみると

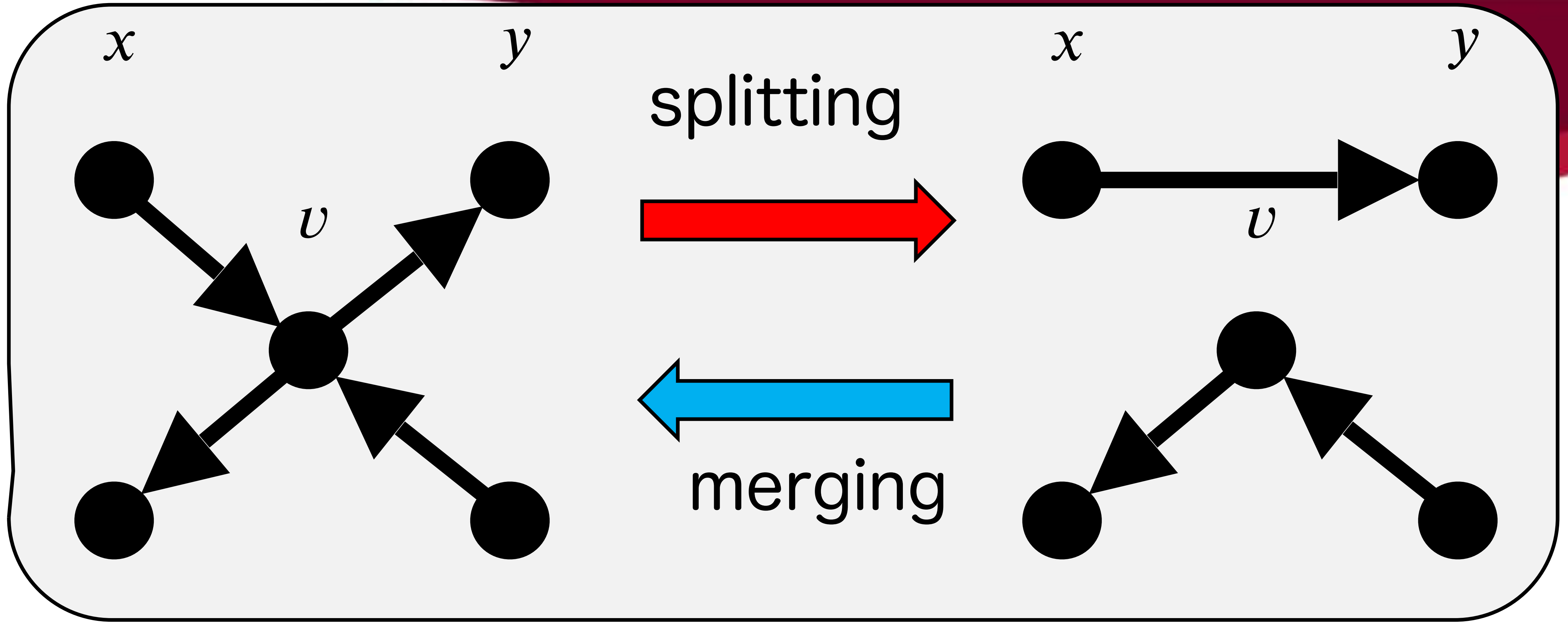
Lemma E.
平面埋め込み不可能な正則有向グラフは$C_3^{(2)}$をimmersionとして含む.



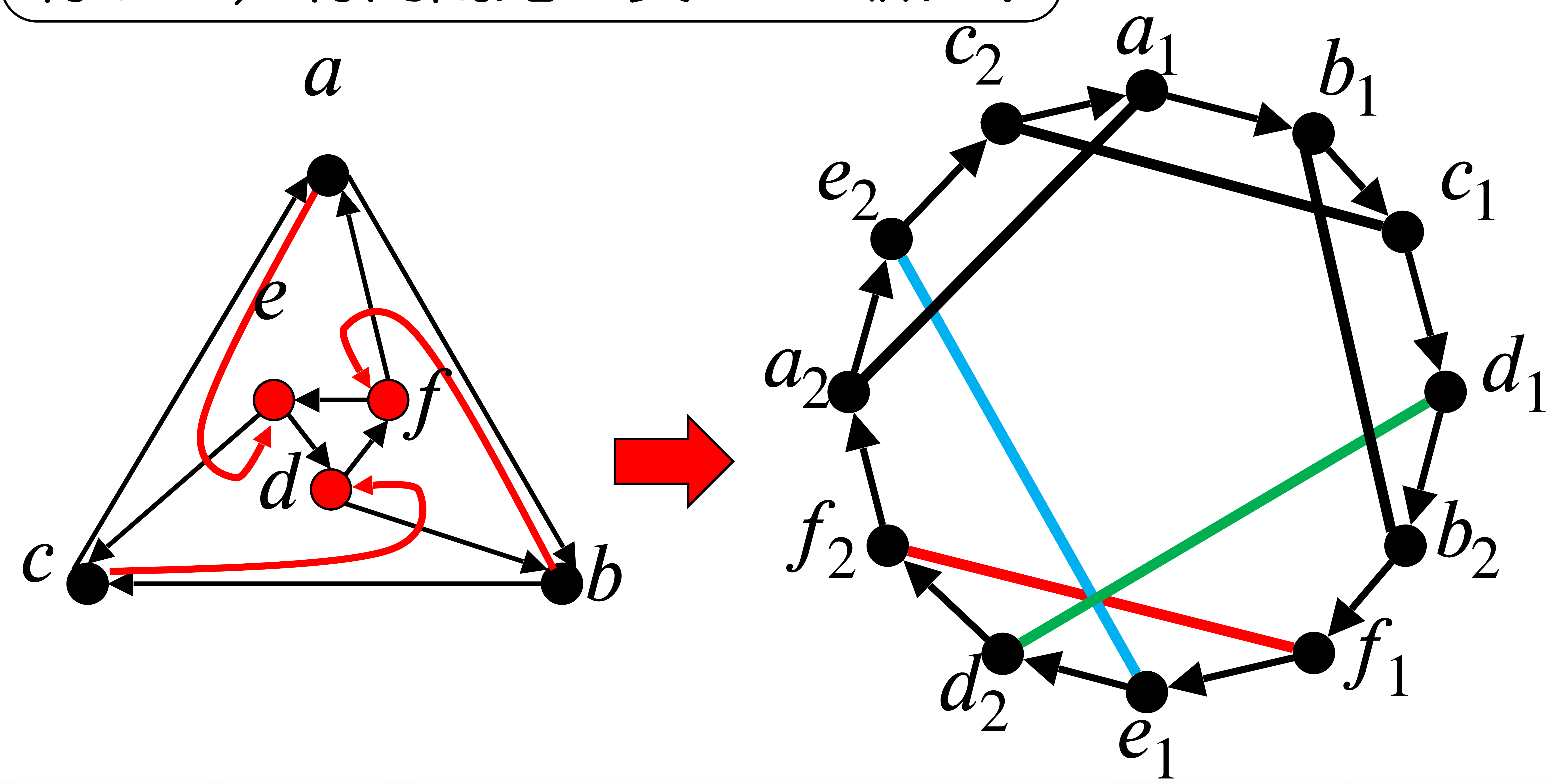


この3頂点以外の点でsplittingを行う.

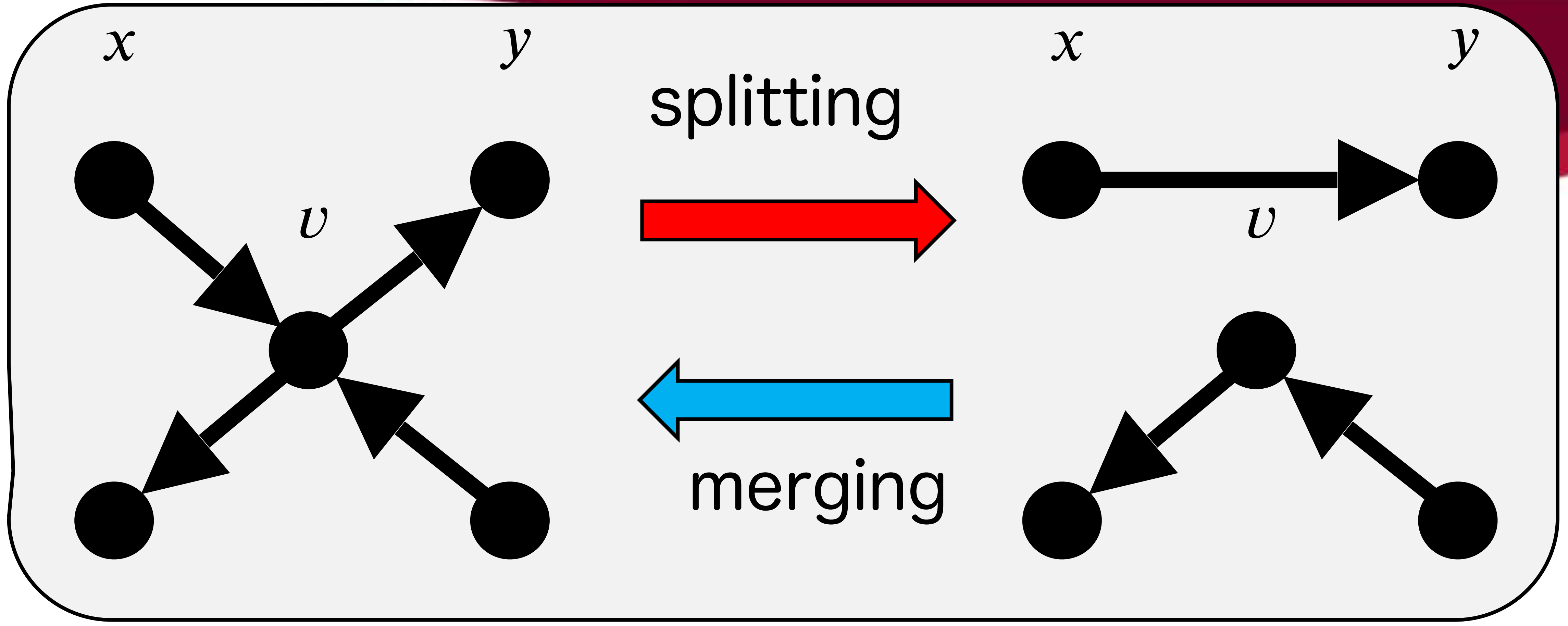
実際にやってみると



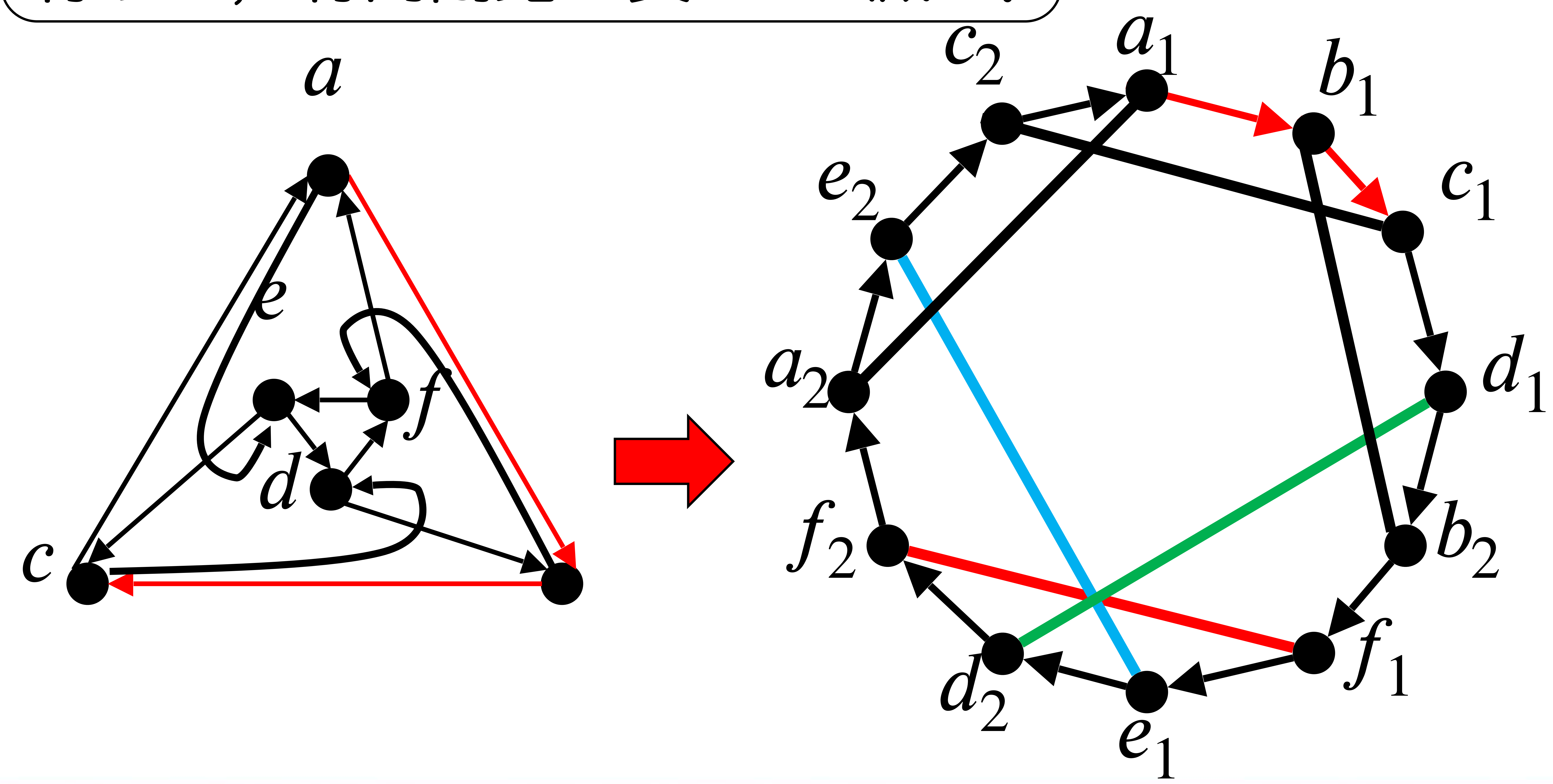
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.



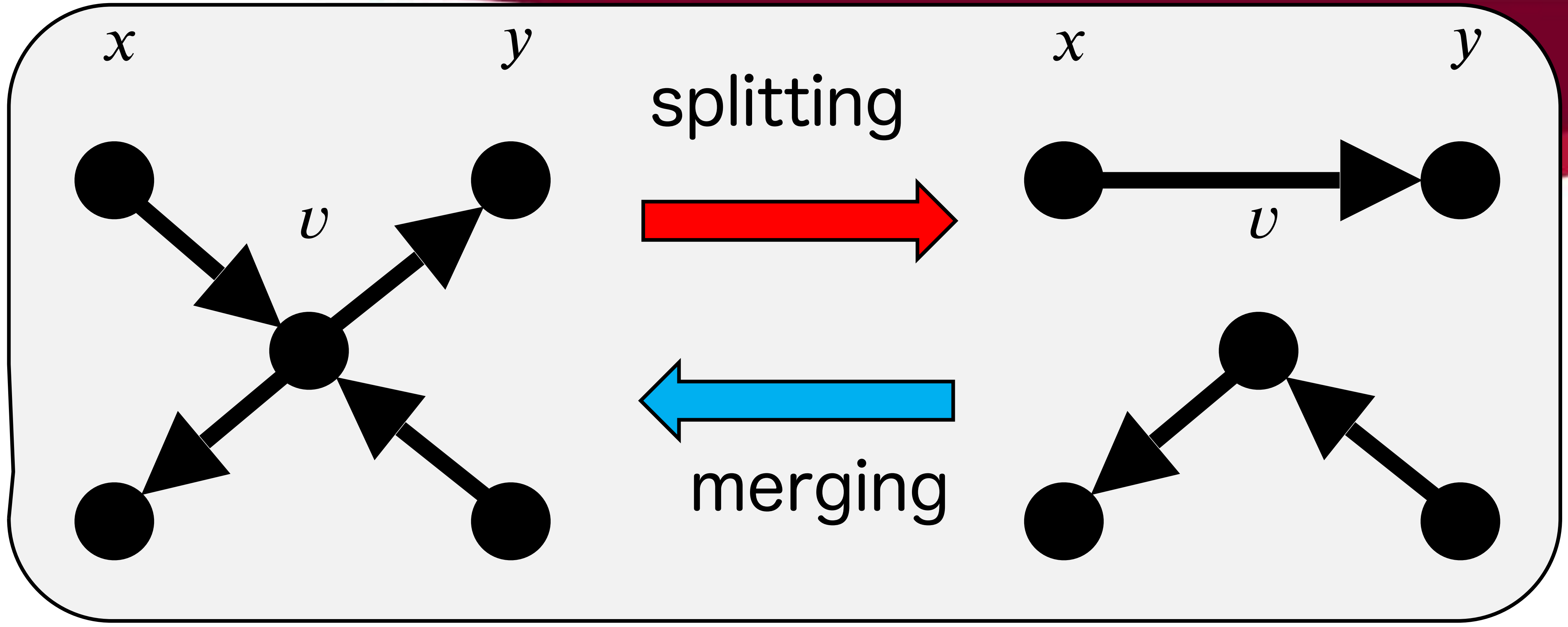
実際にやってみると



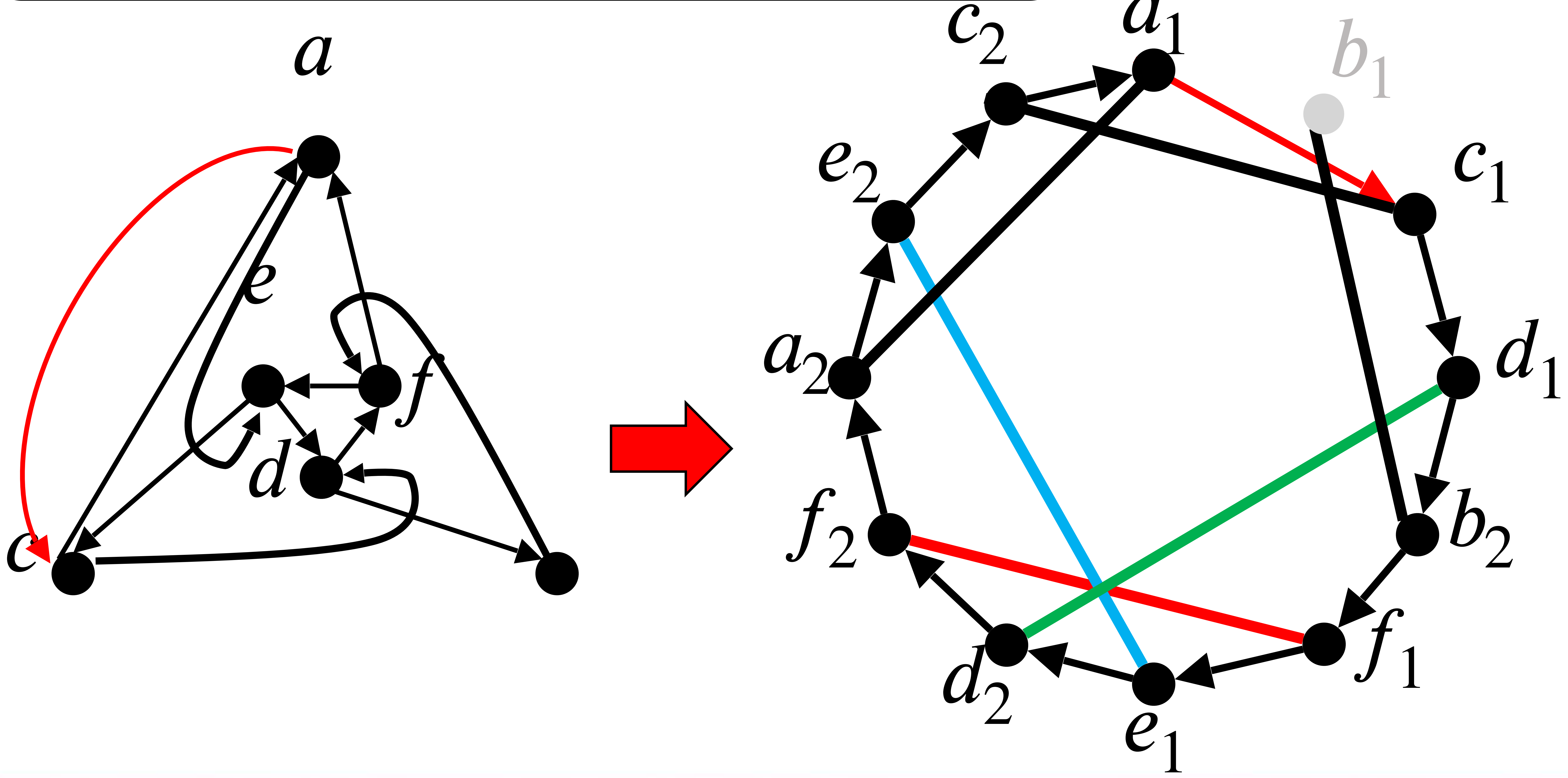
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.



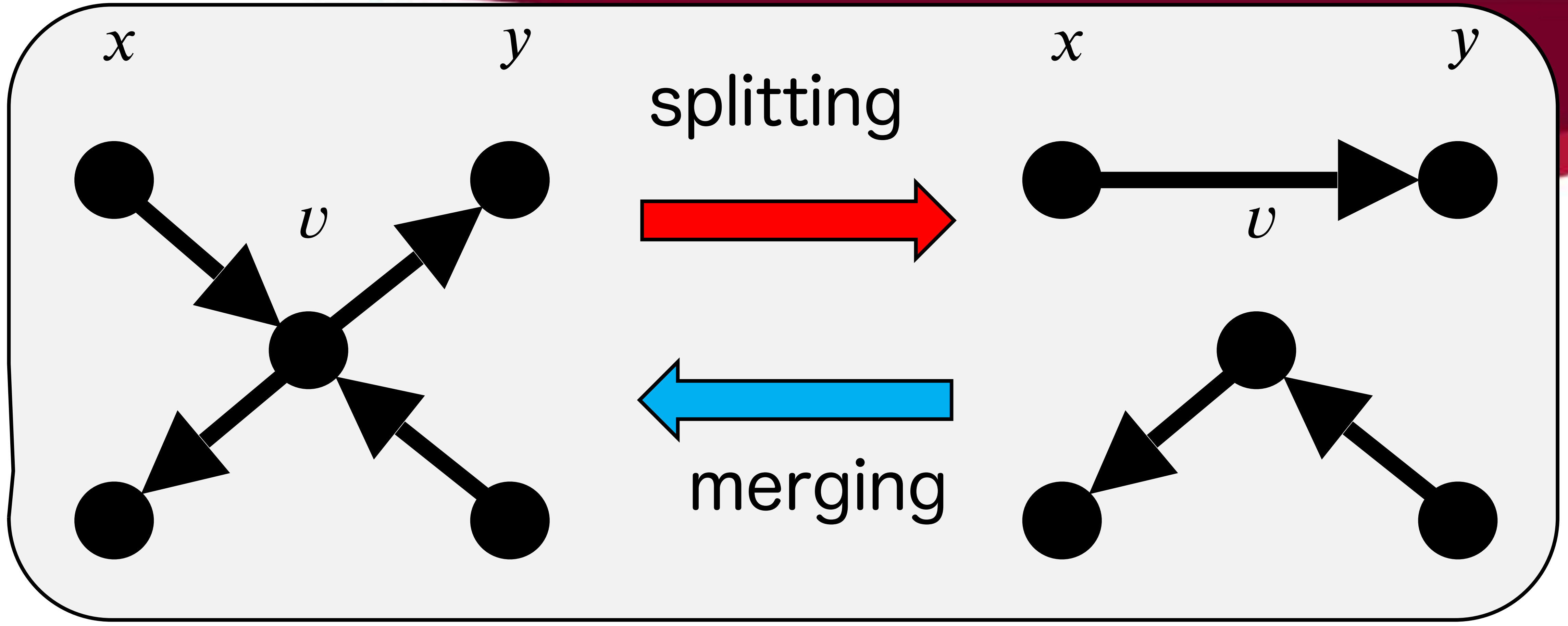
実際にやってみると



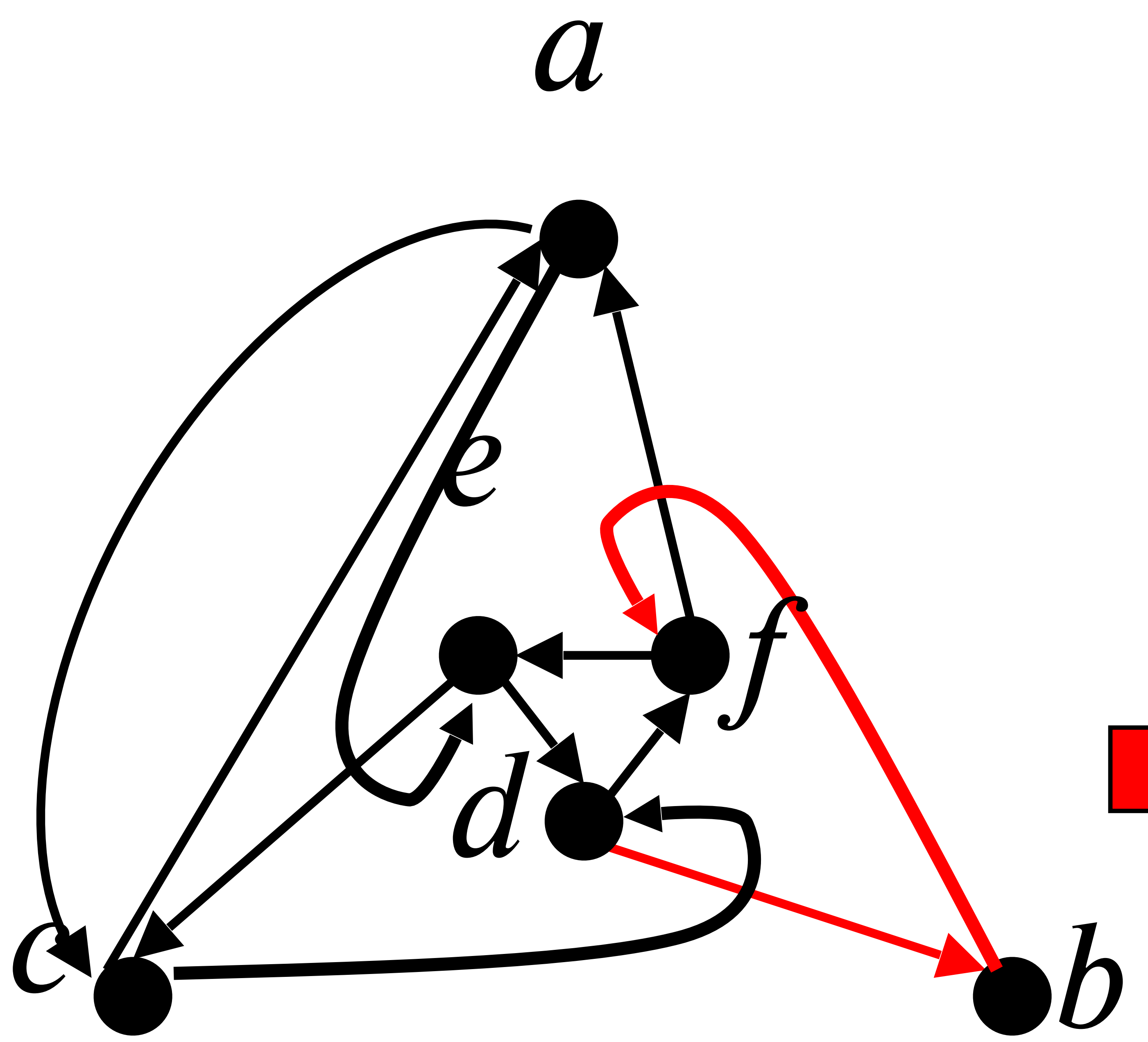
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

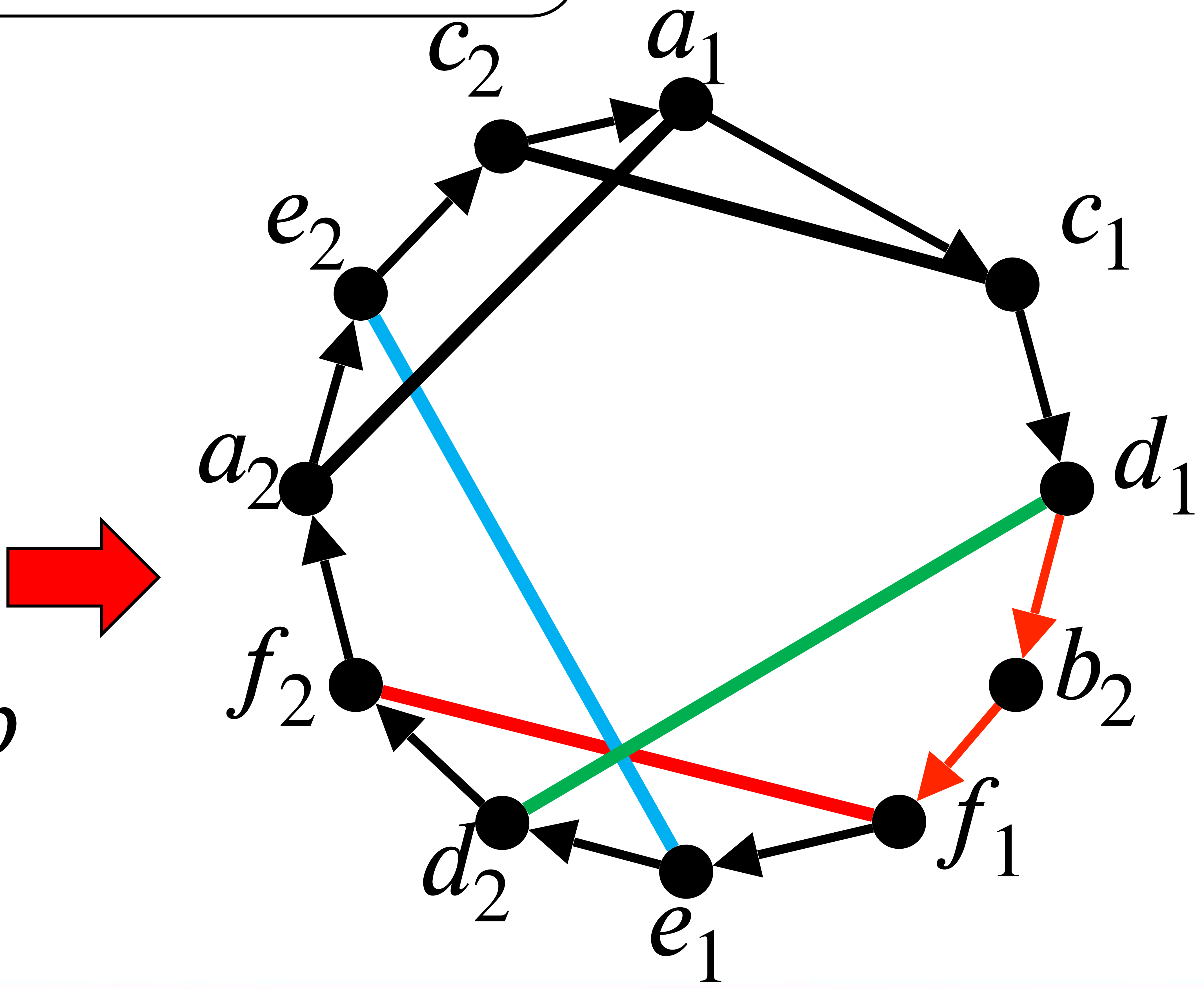


実際にやってみると

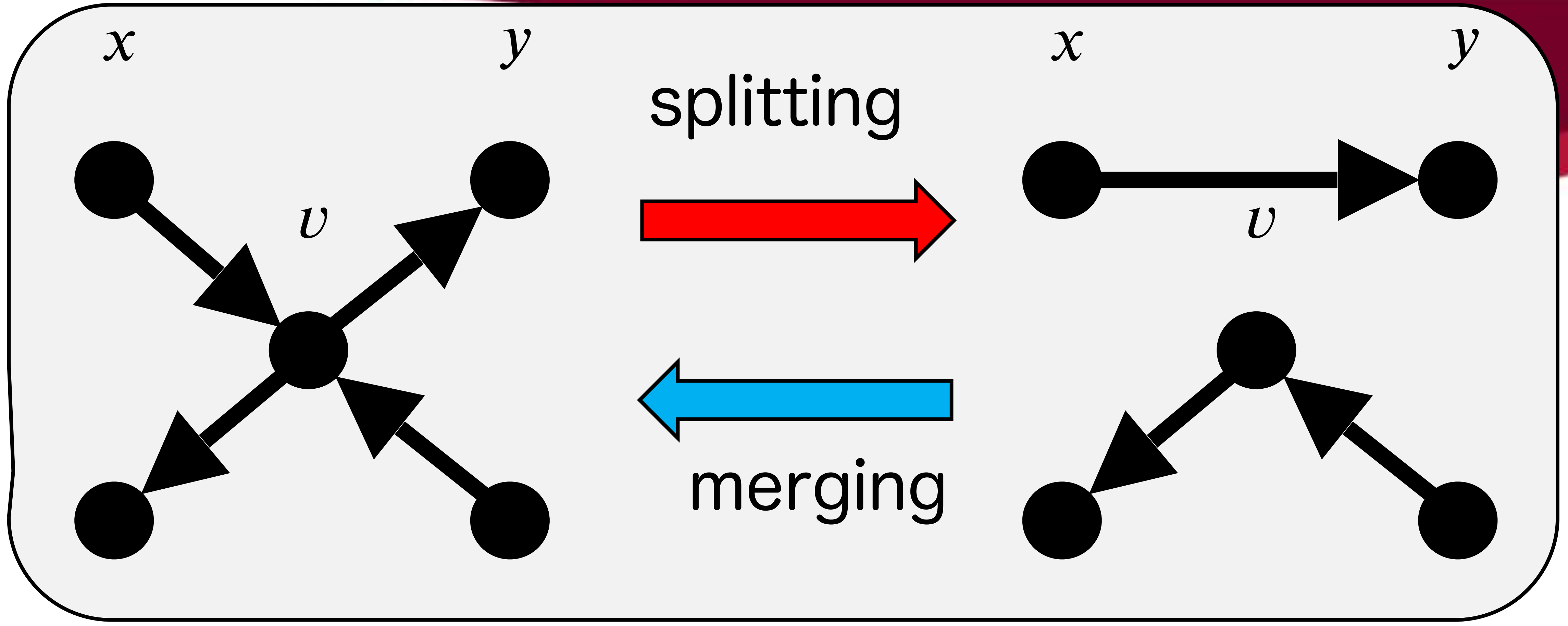


Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

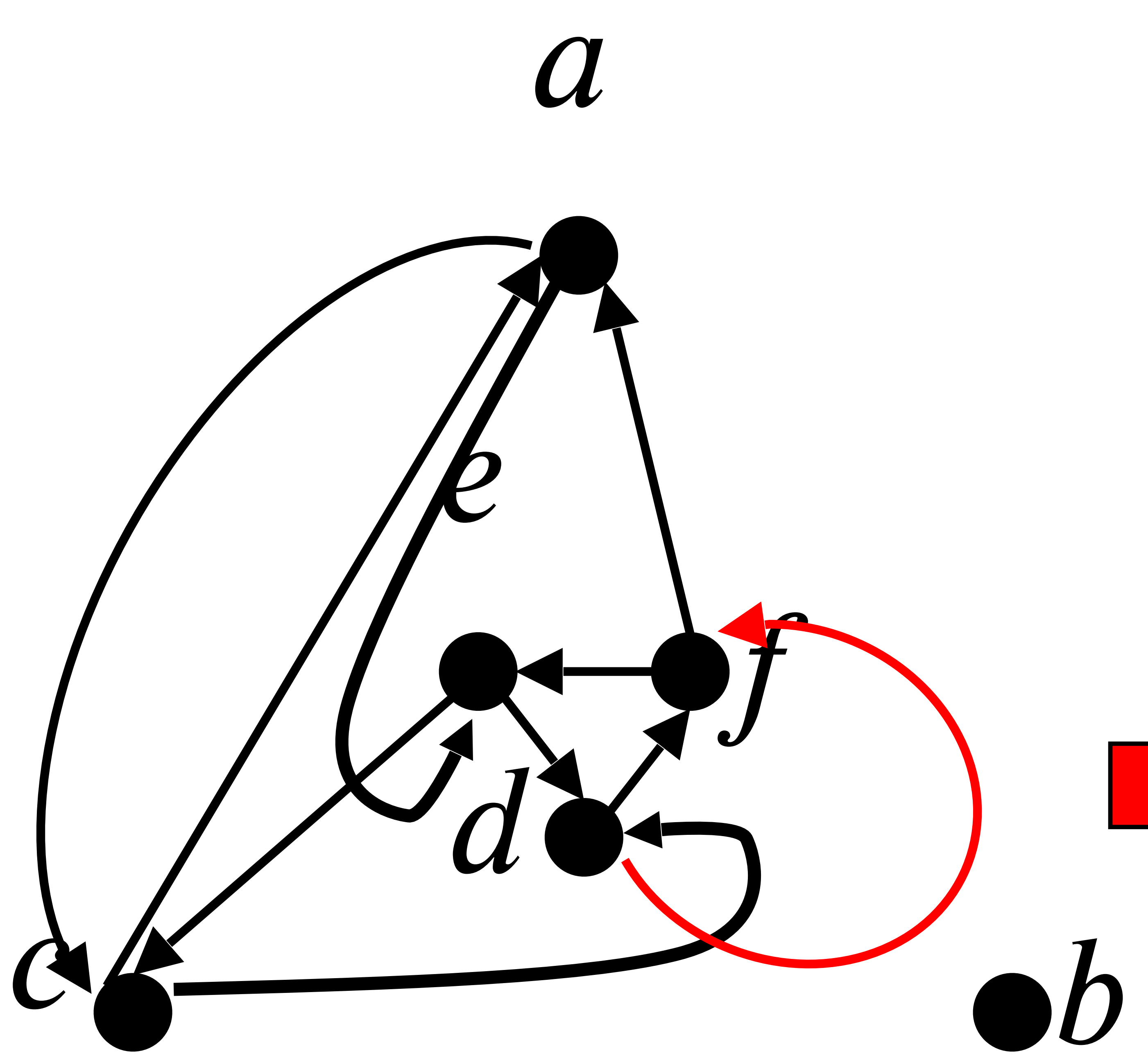


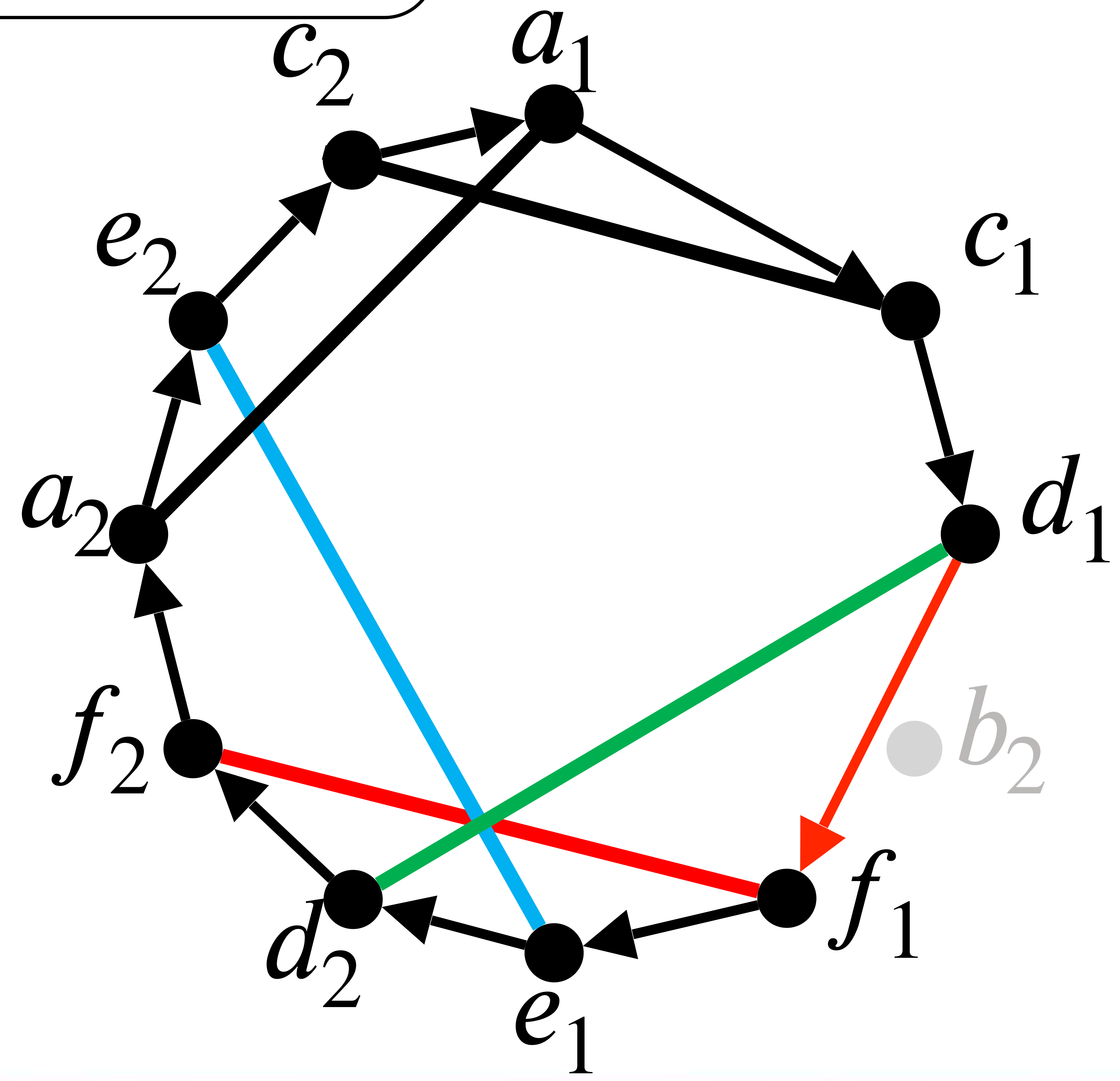


実際にやってみると



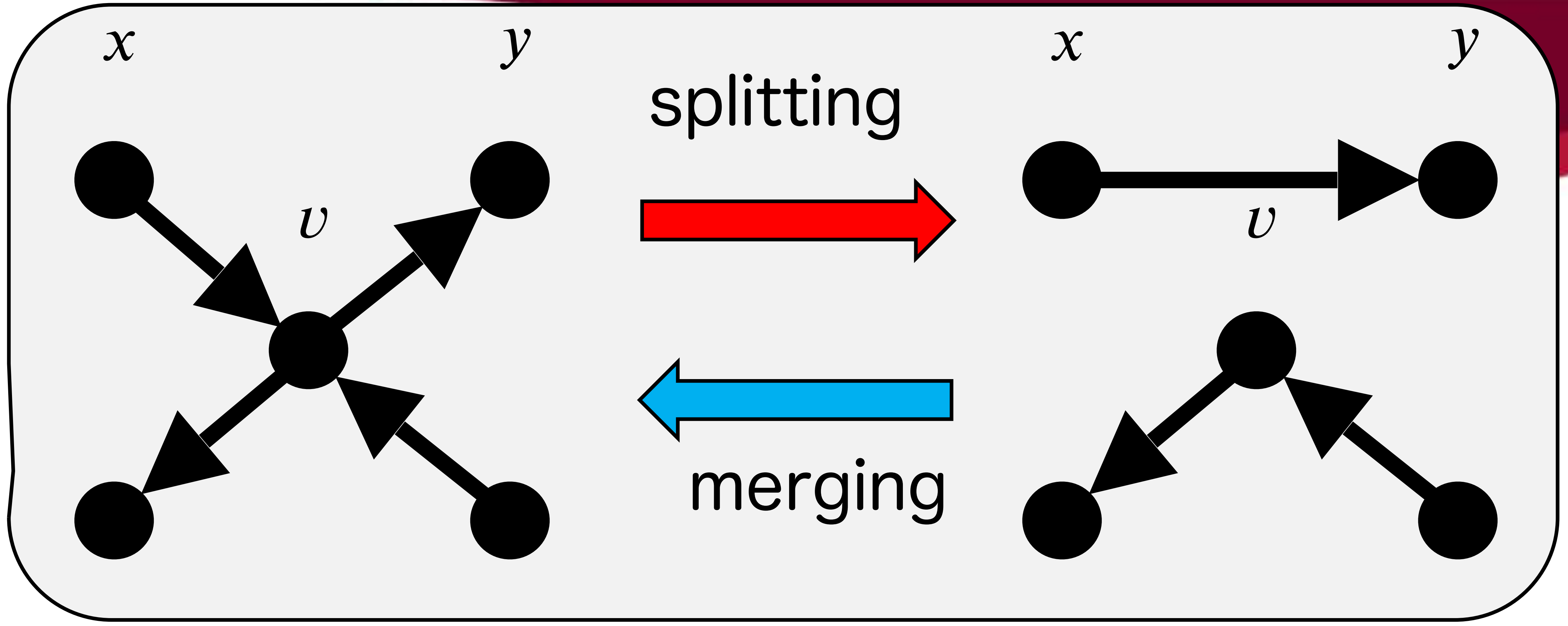
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

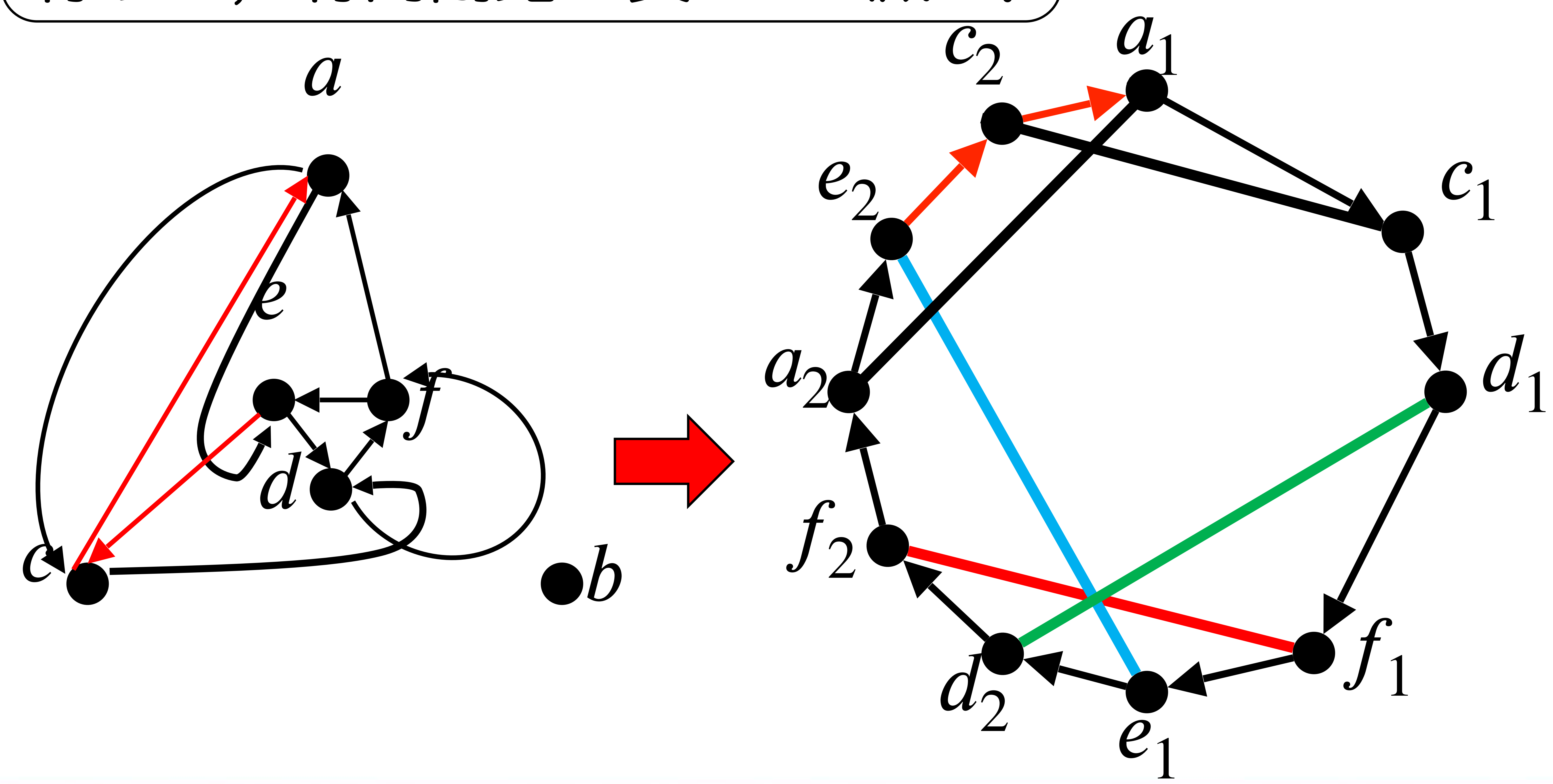




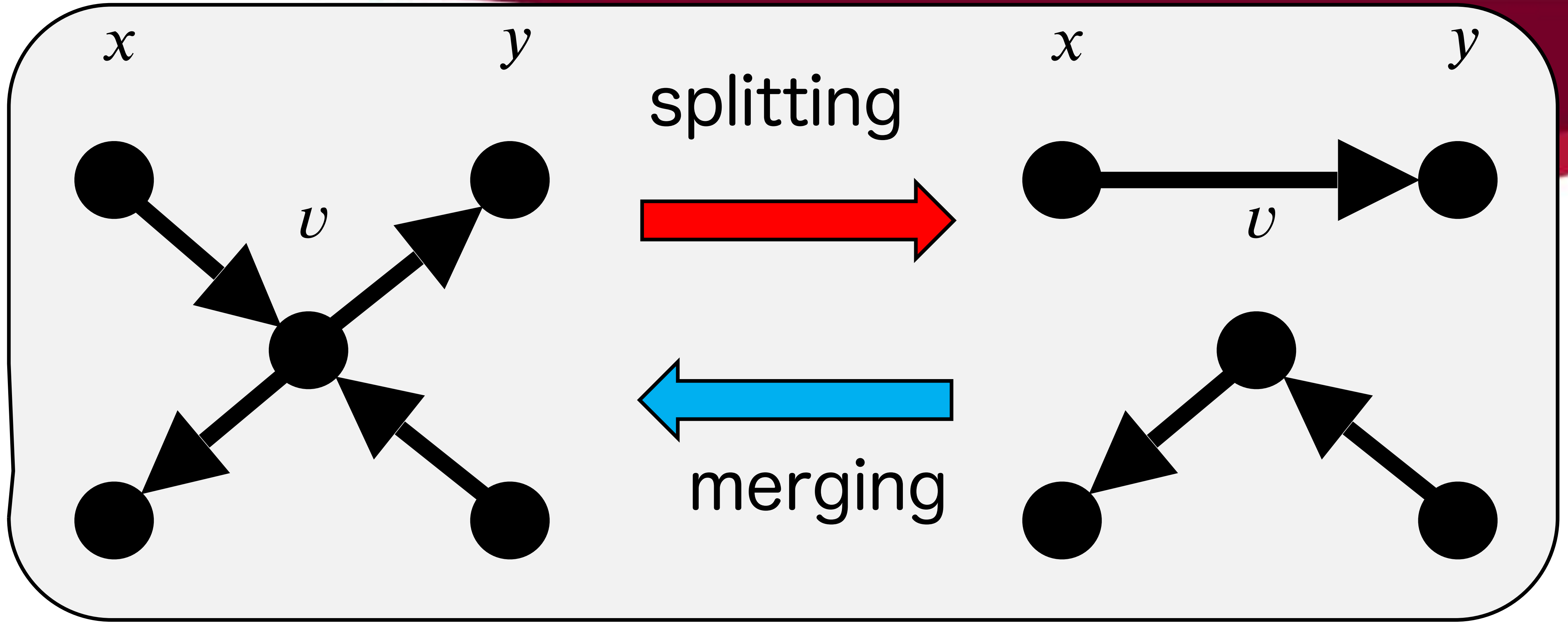
実際にやってみると

Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

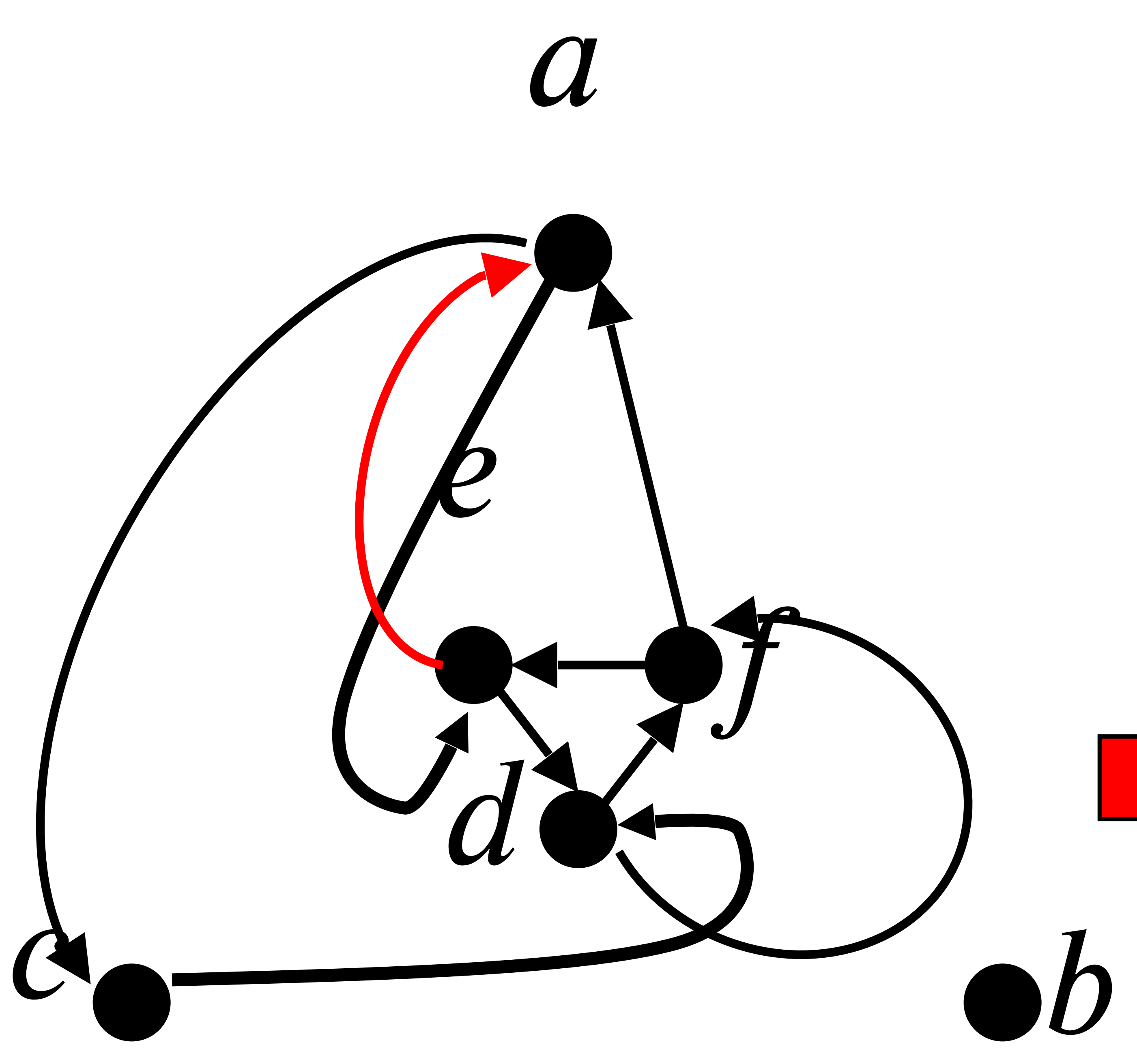


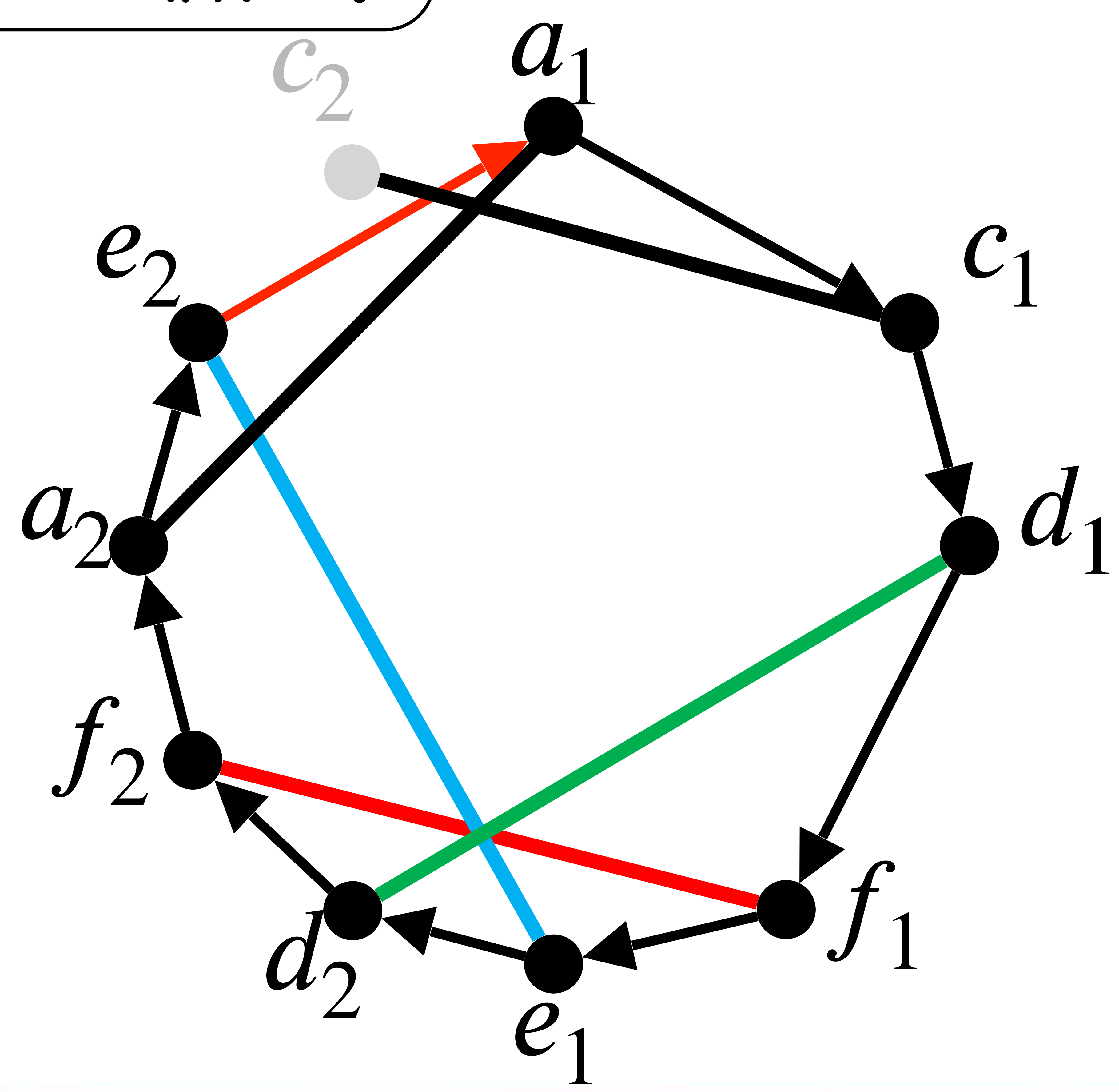


実際にやってみると

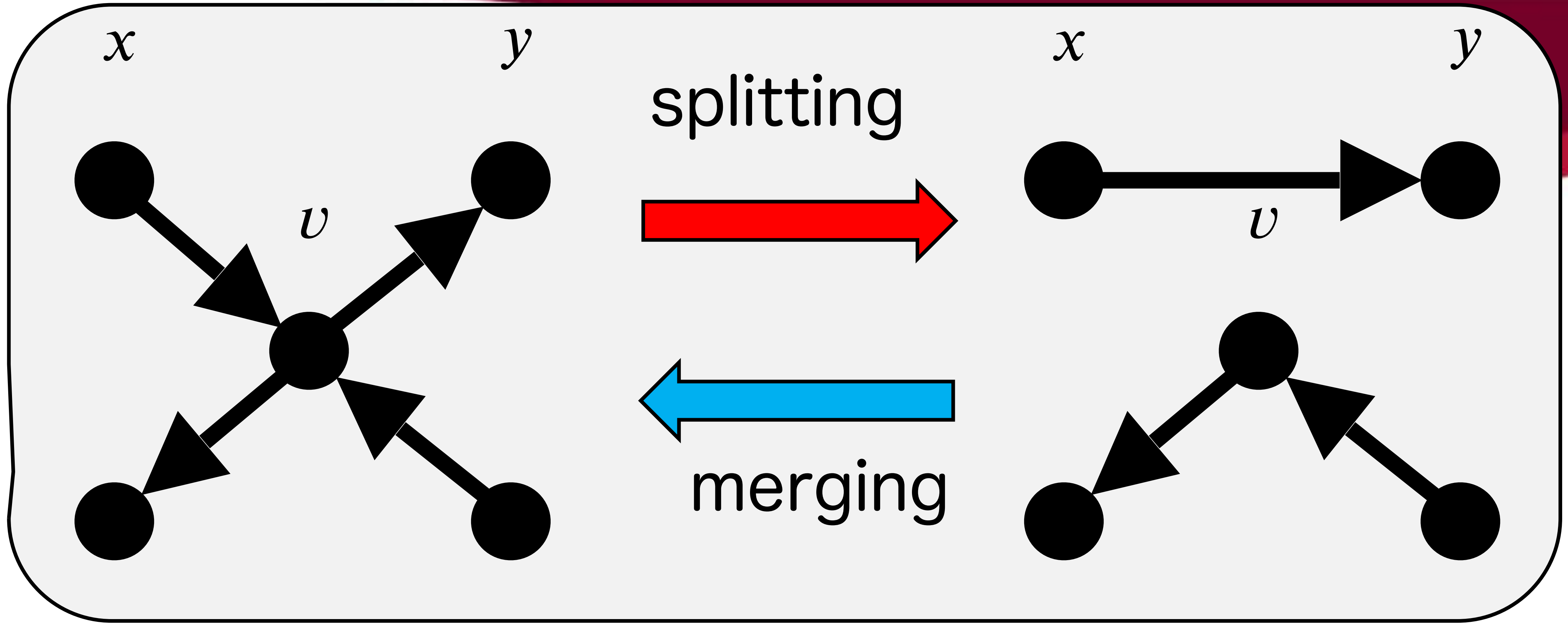


Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

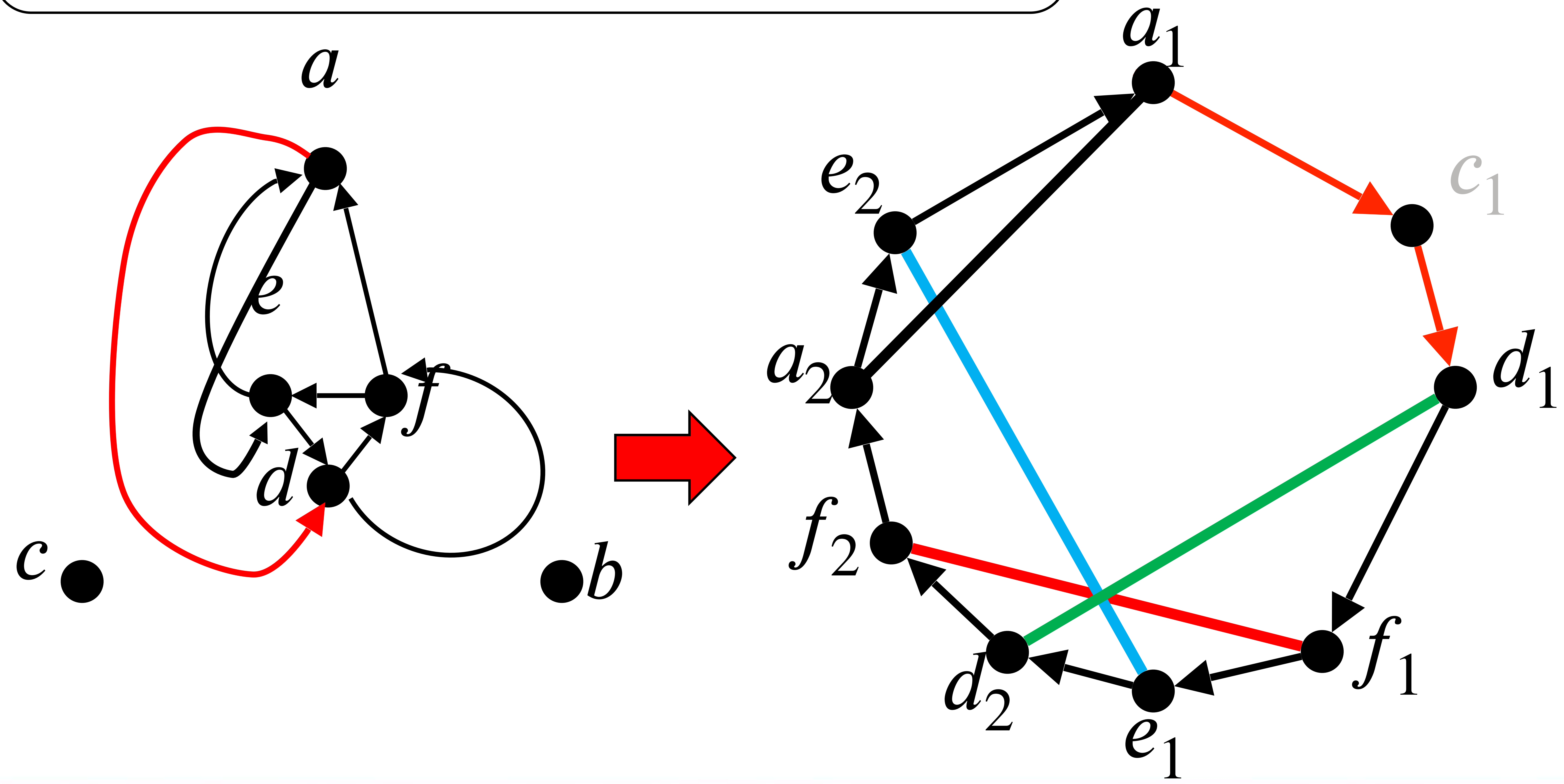




実際にやってみると

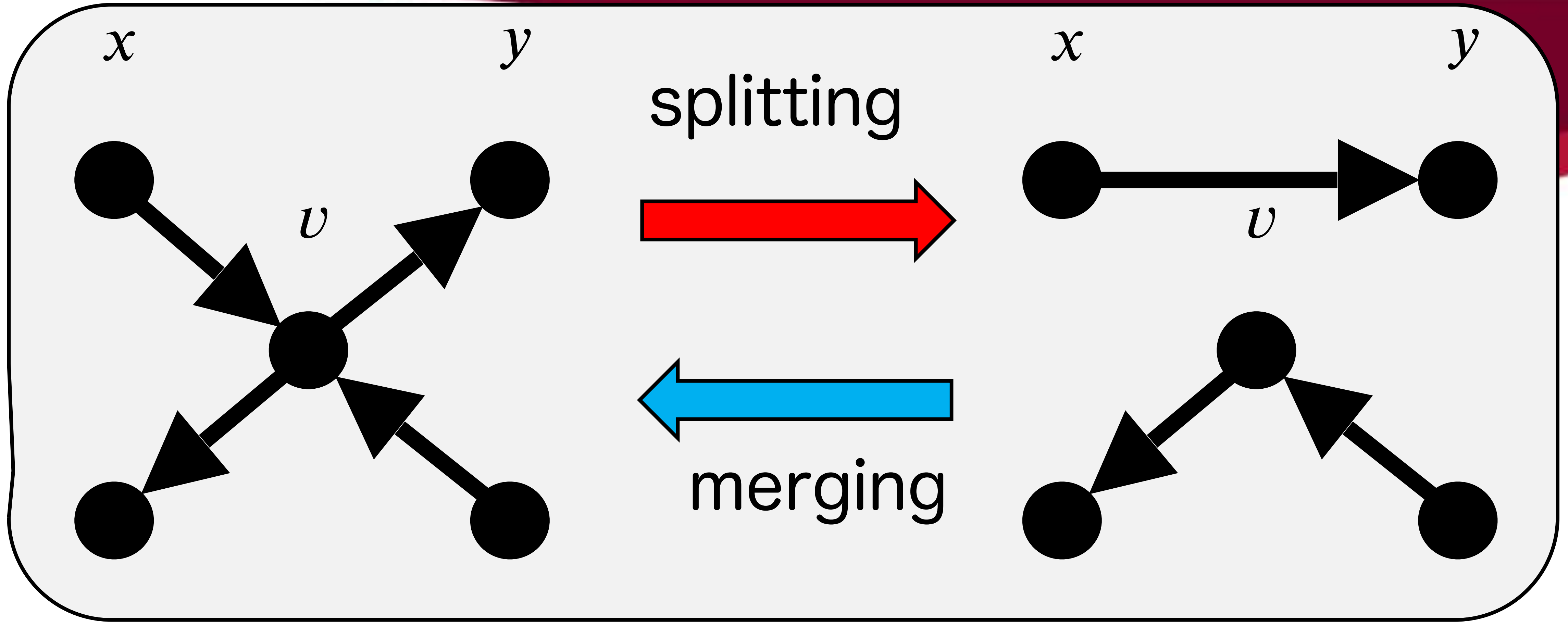


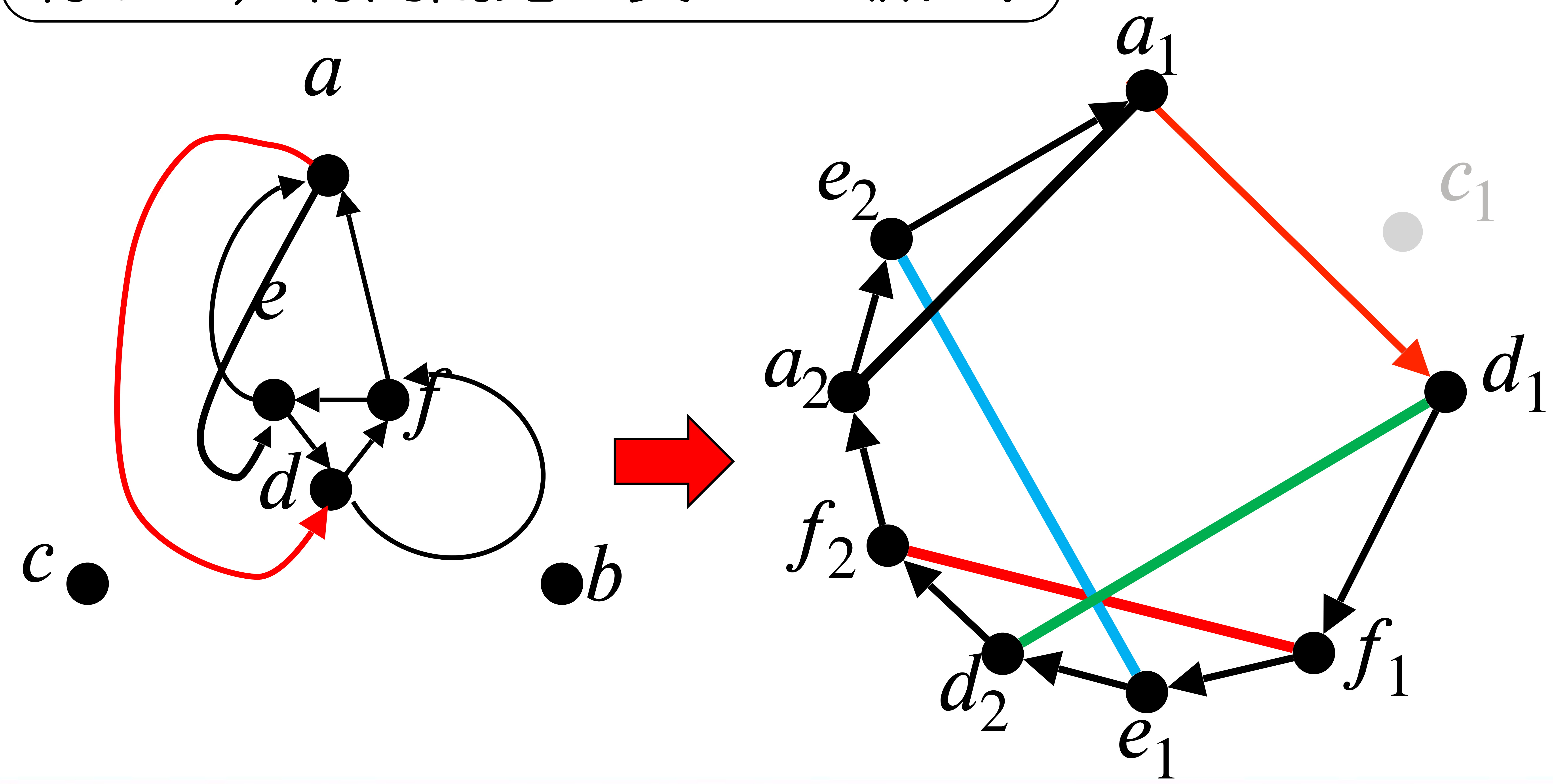
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る．



実際にやってみると

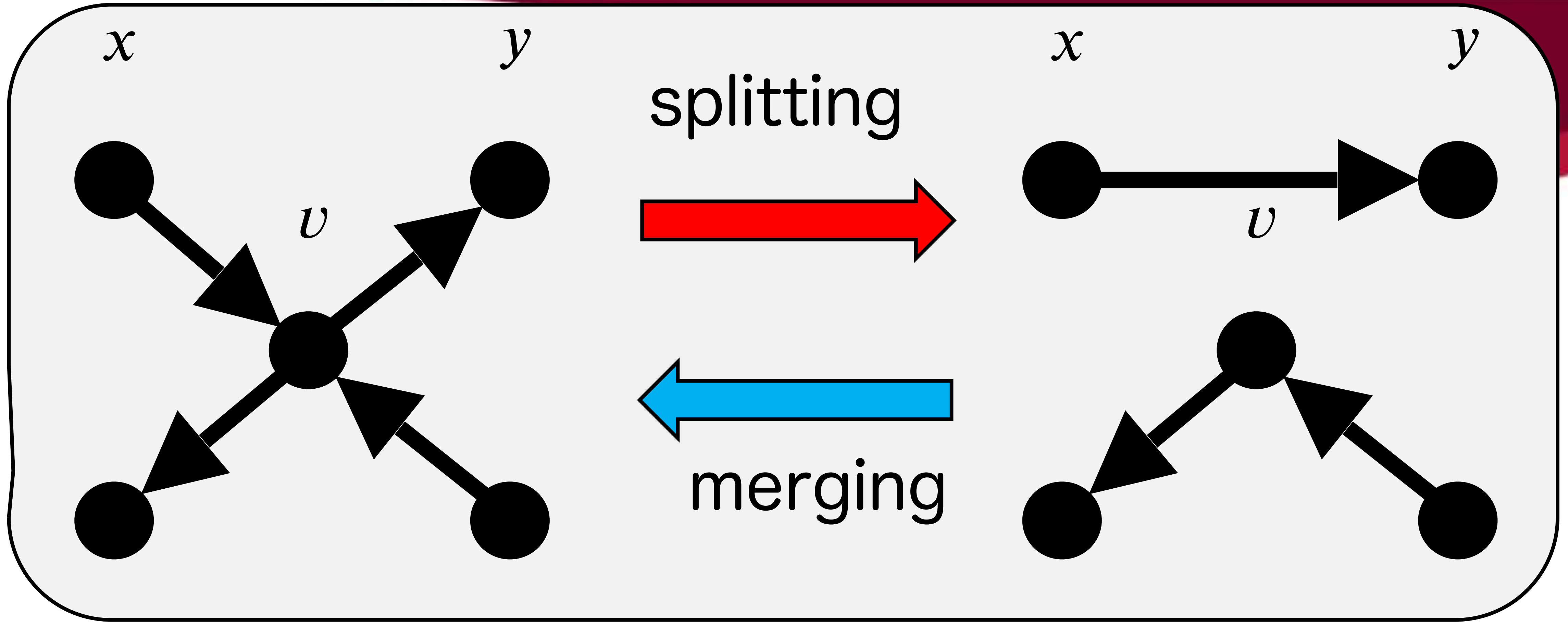
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

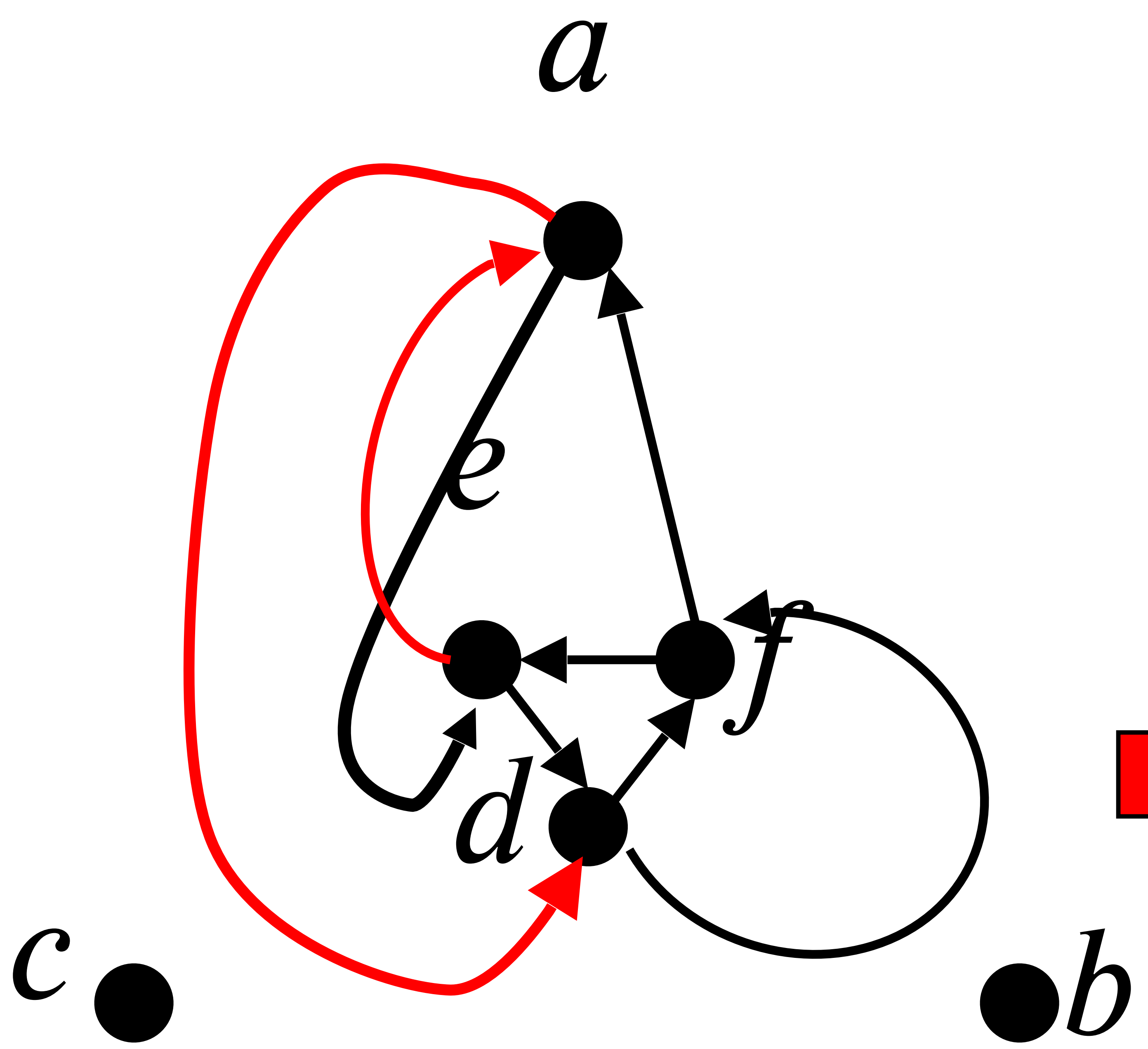


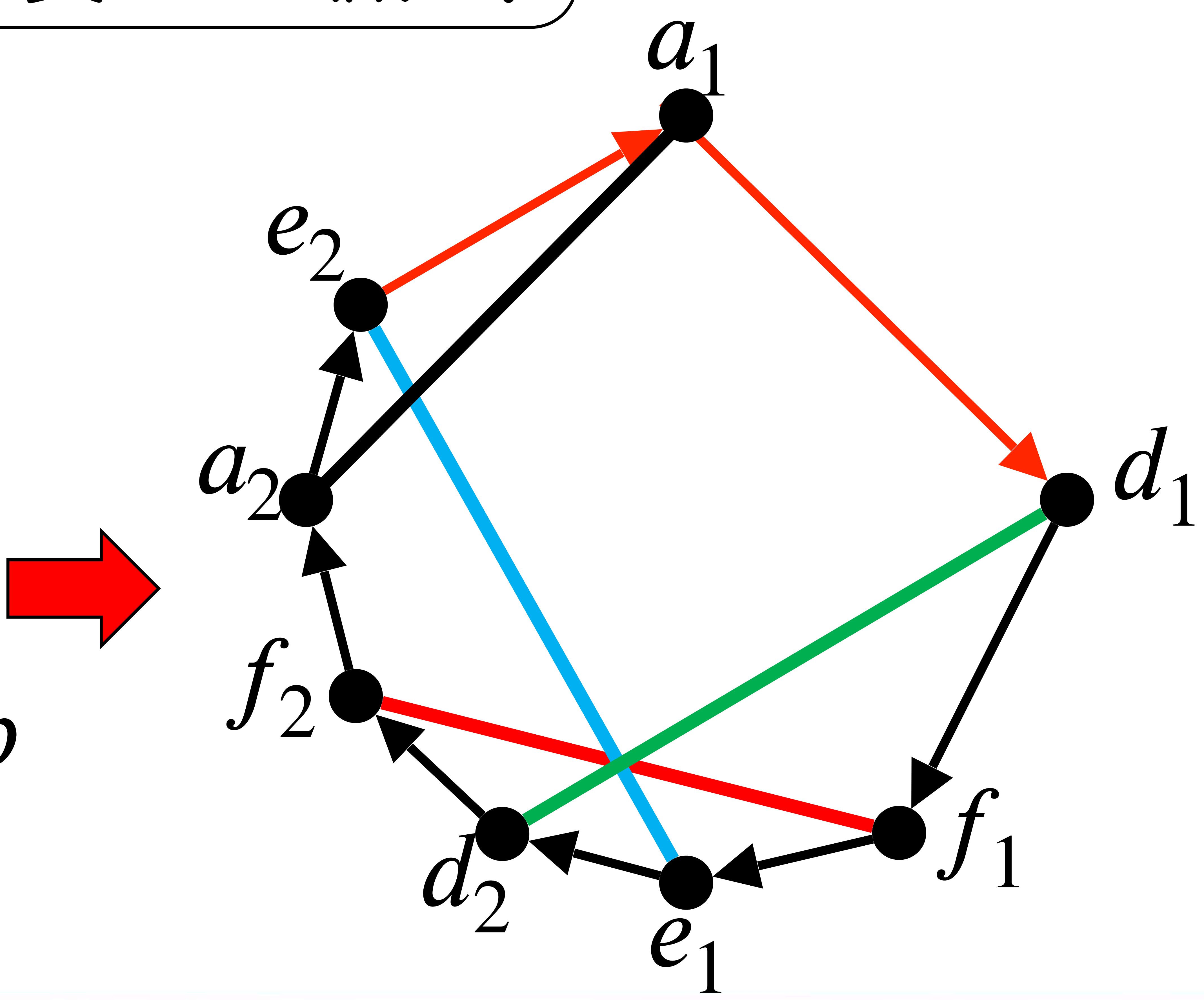


実際にやってみると

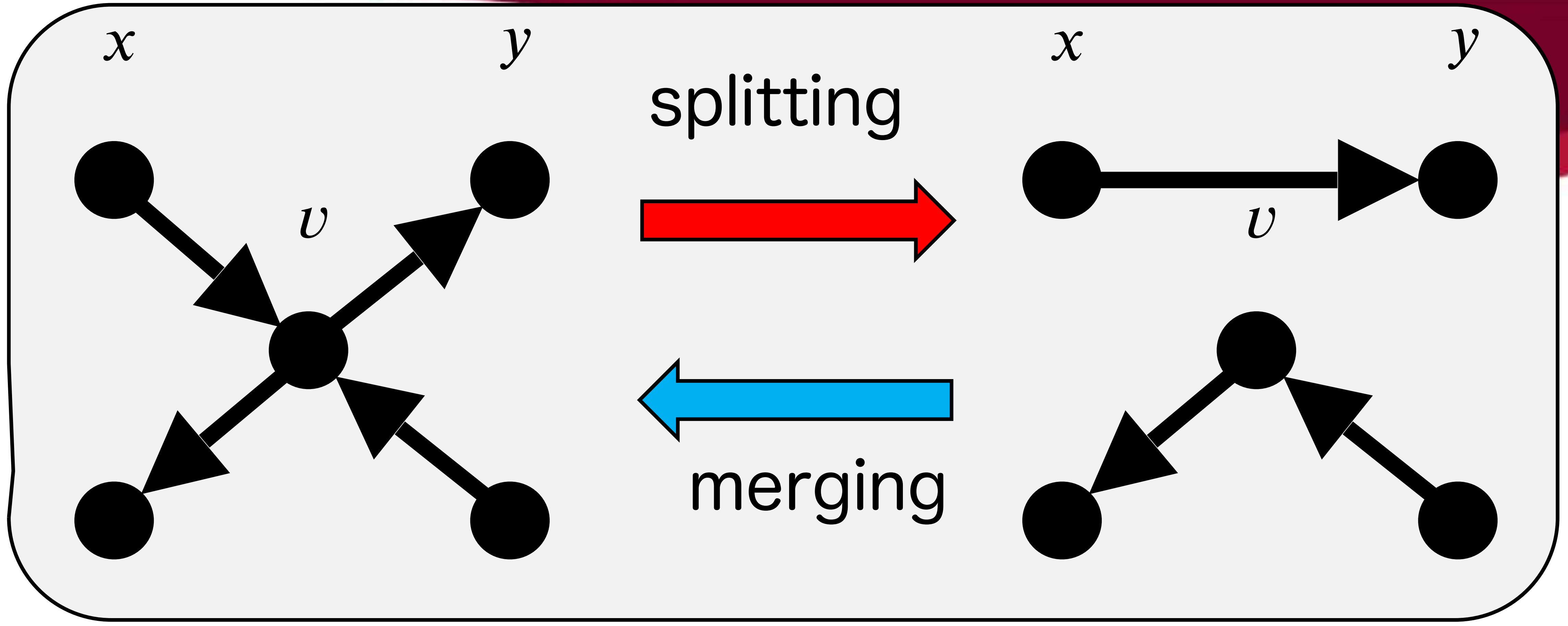
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.



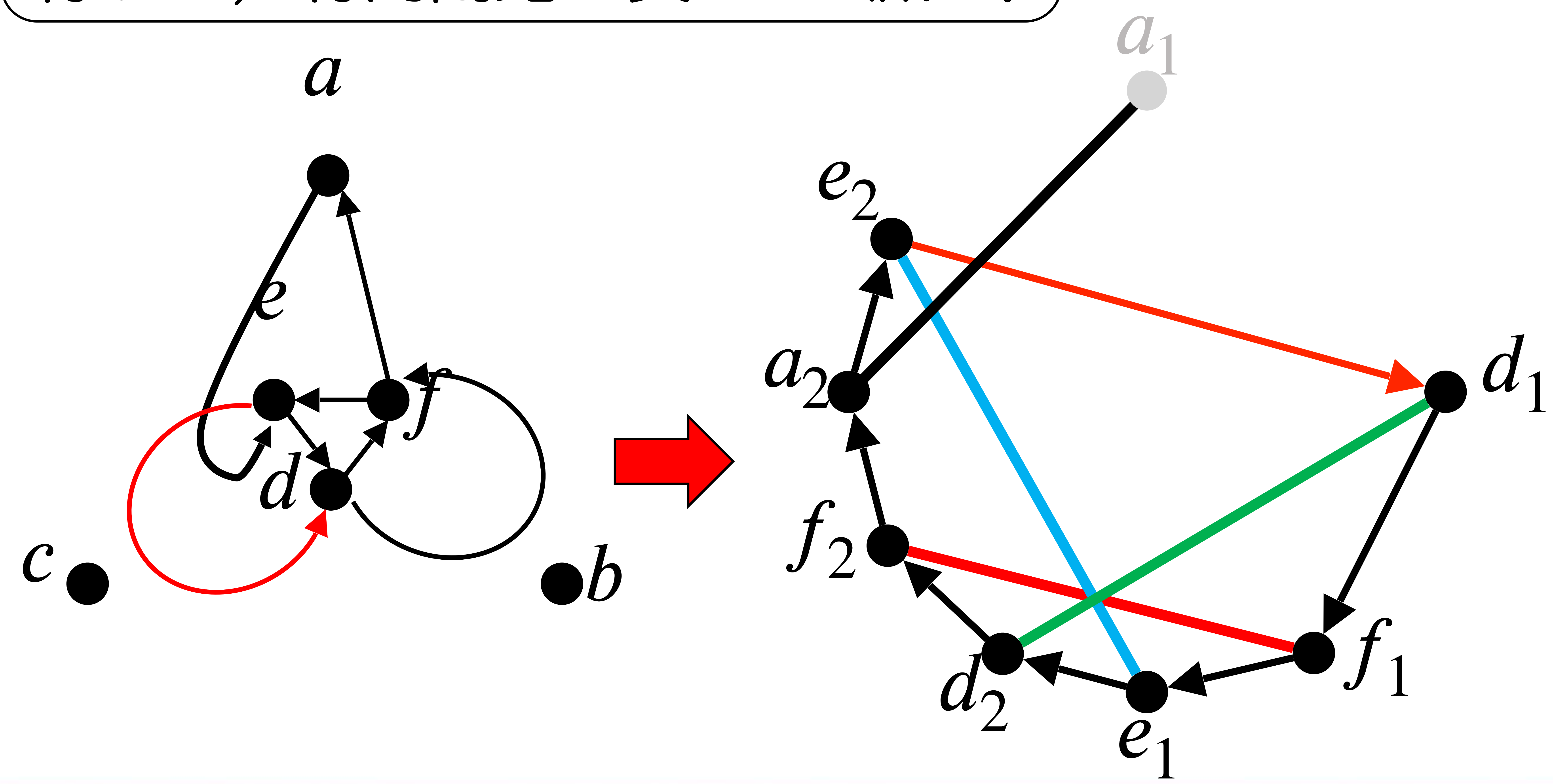




実際にやってみると

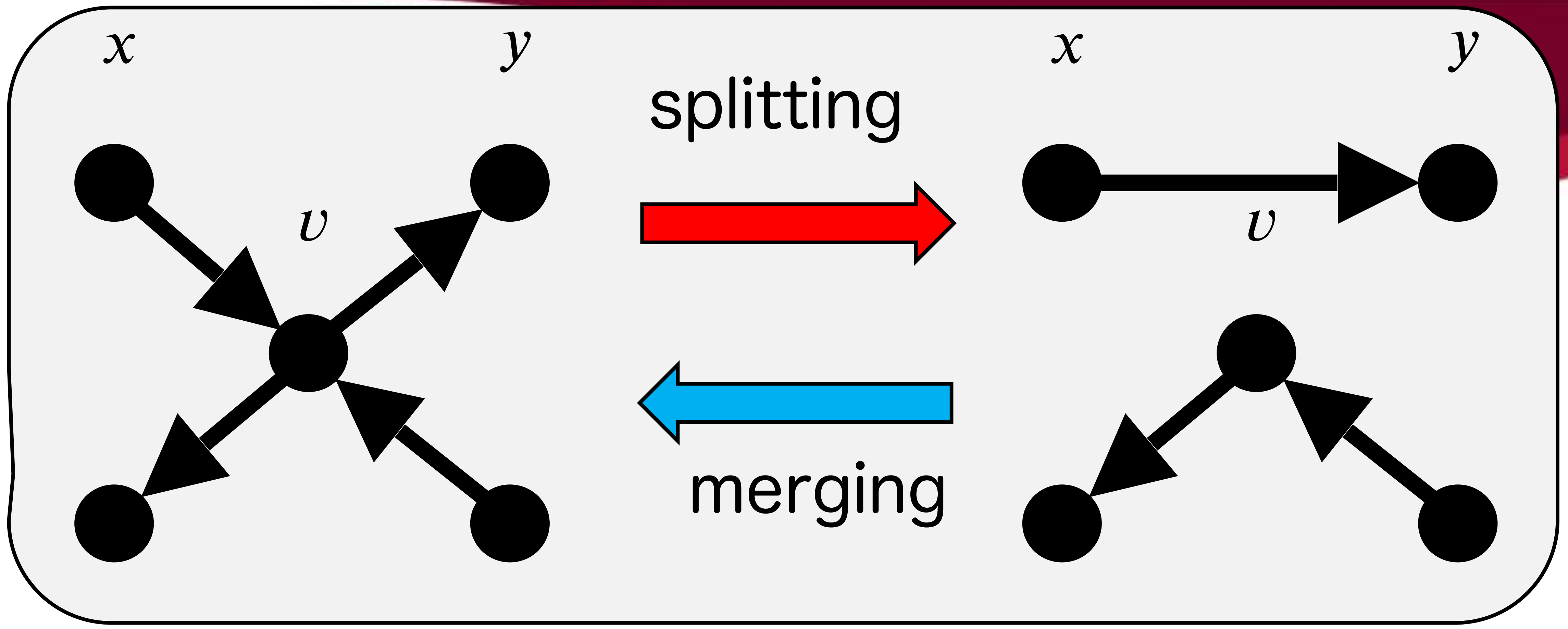


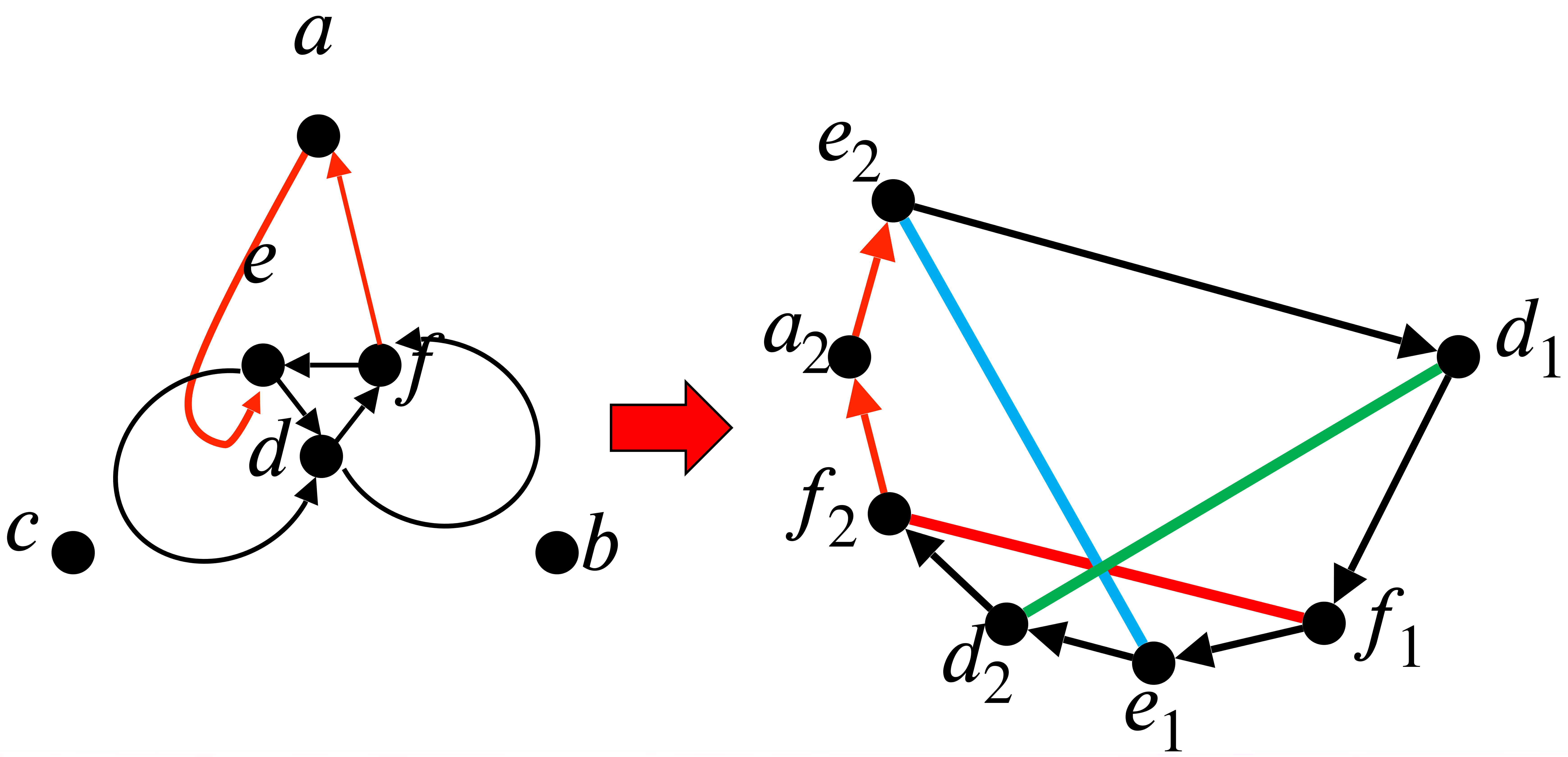
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.



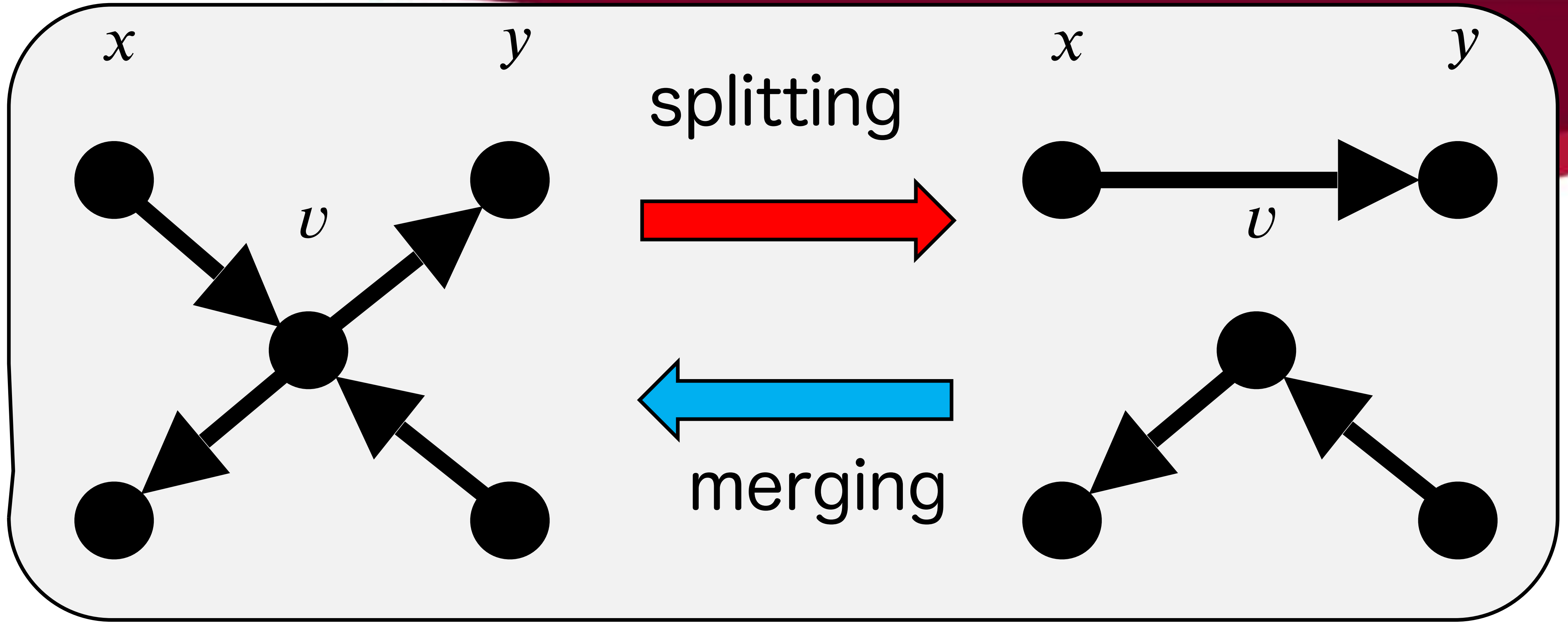
実際にやってみると

Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

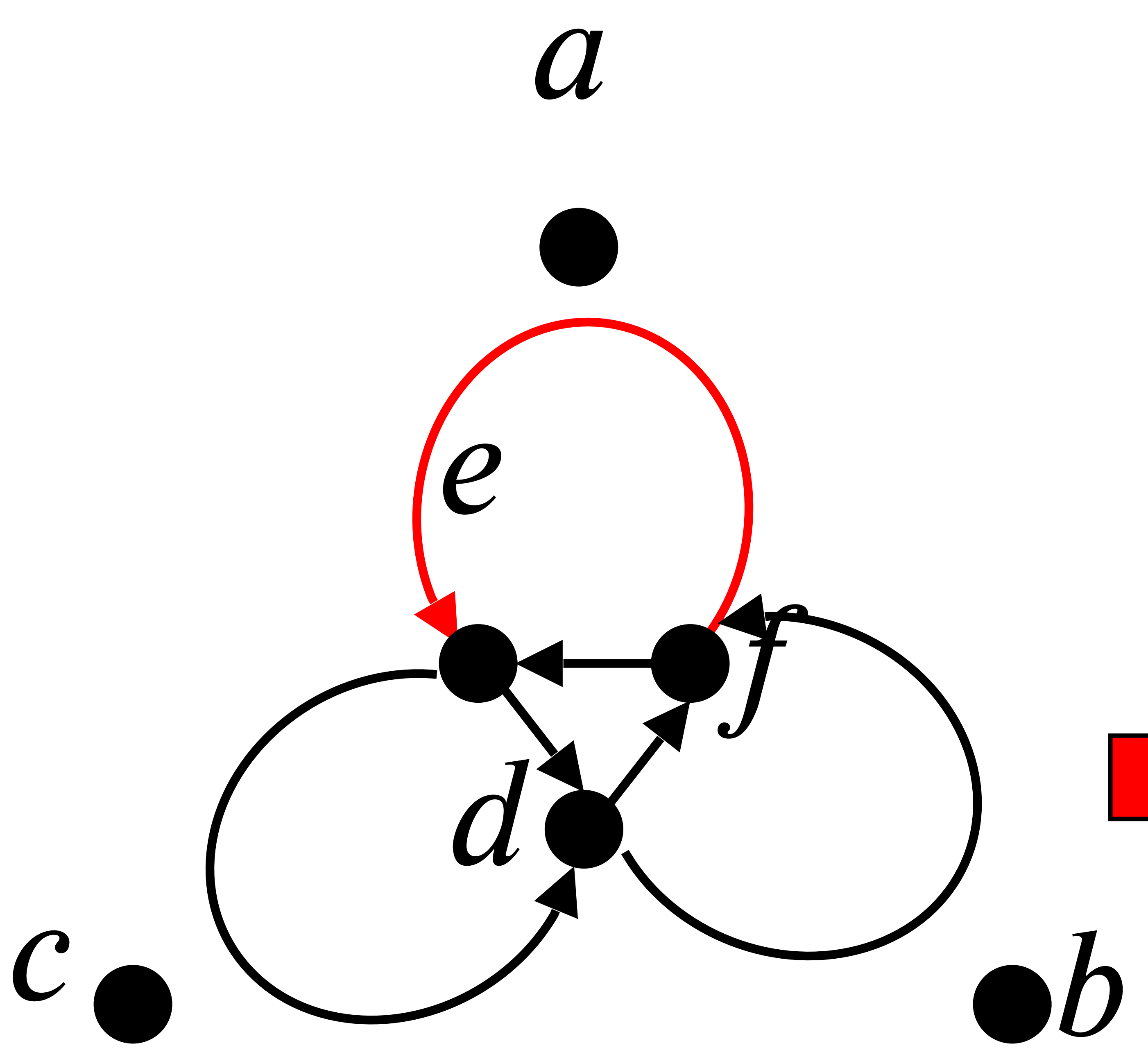


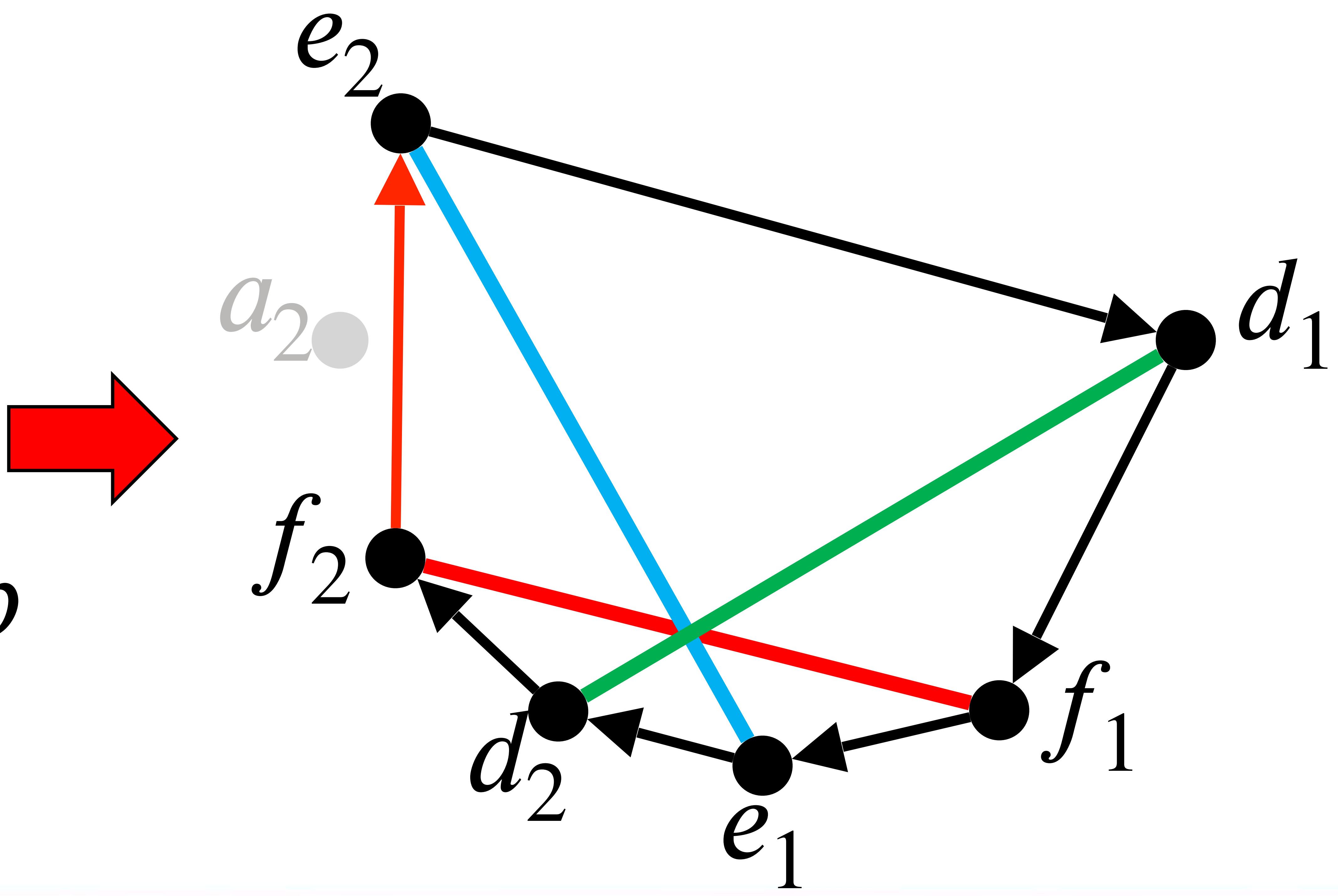


実際にやってみると



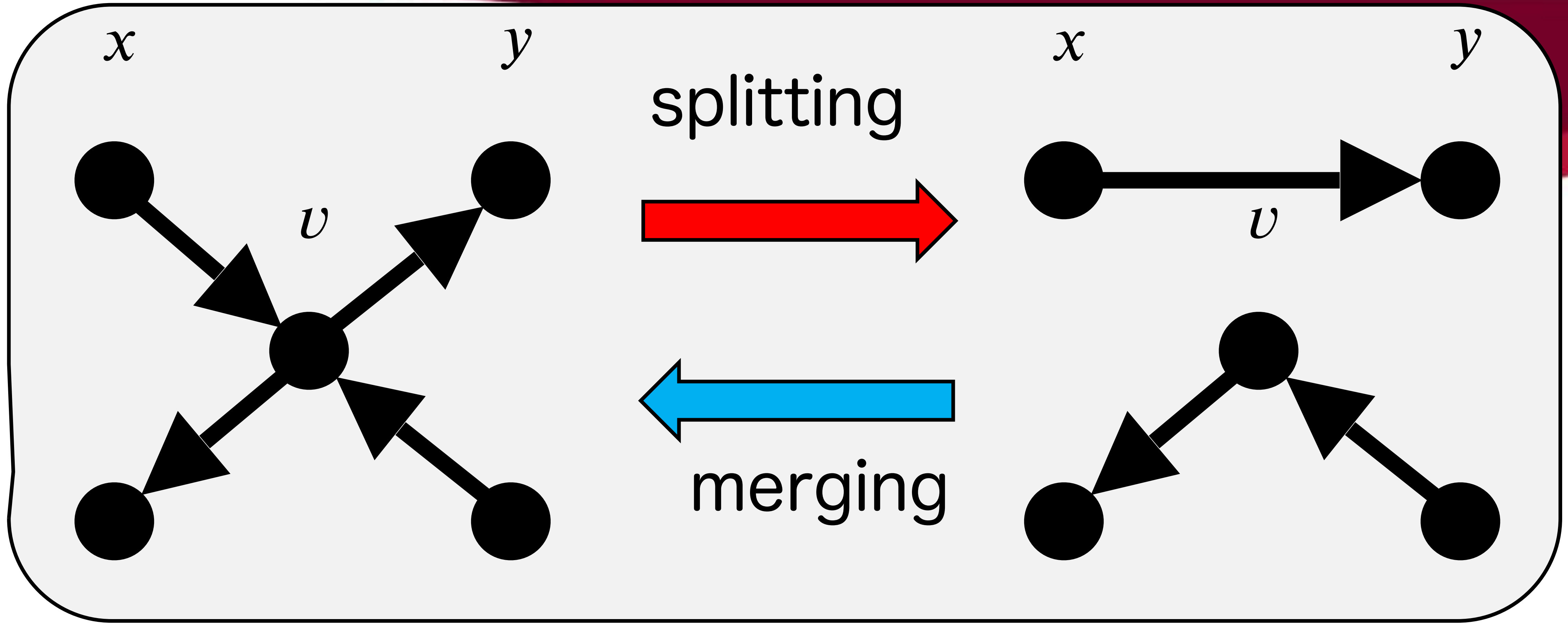
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.

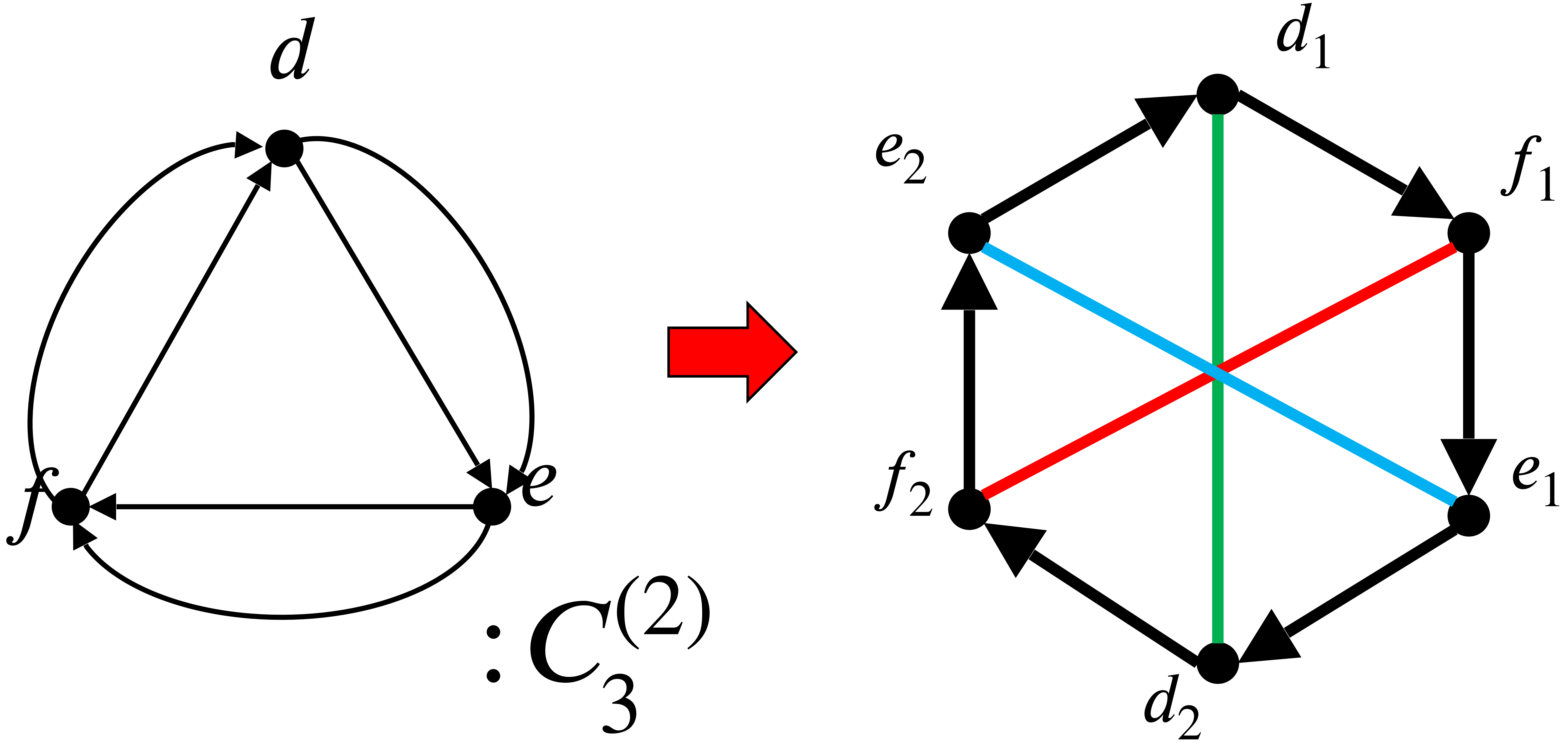




実際にやってみると

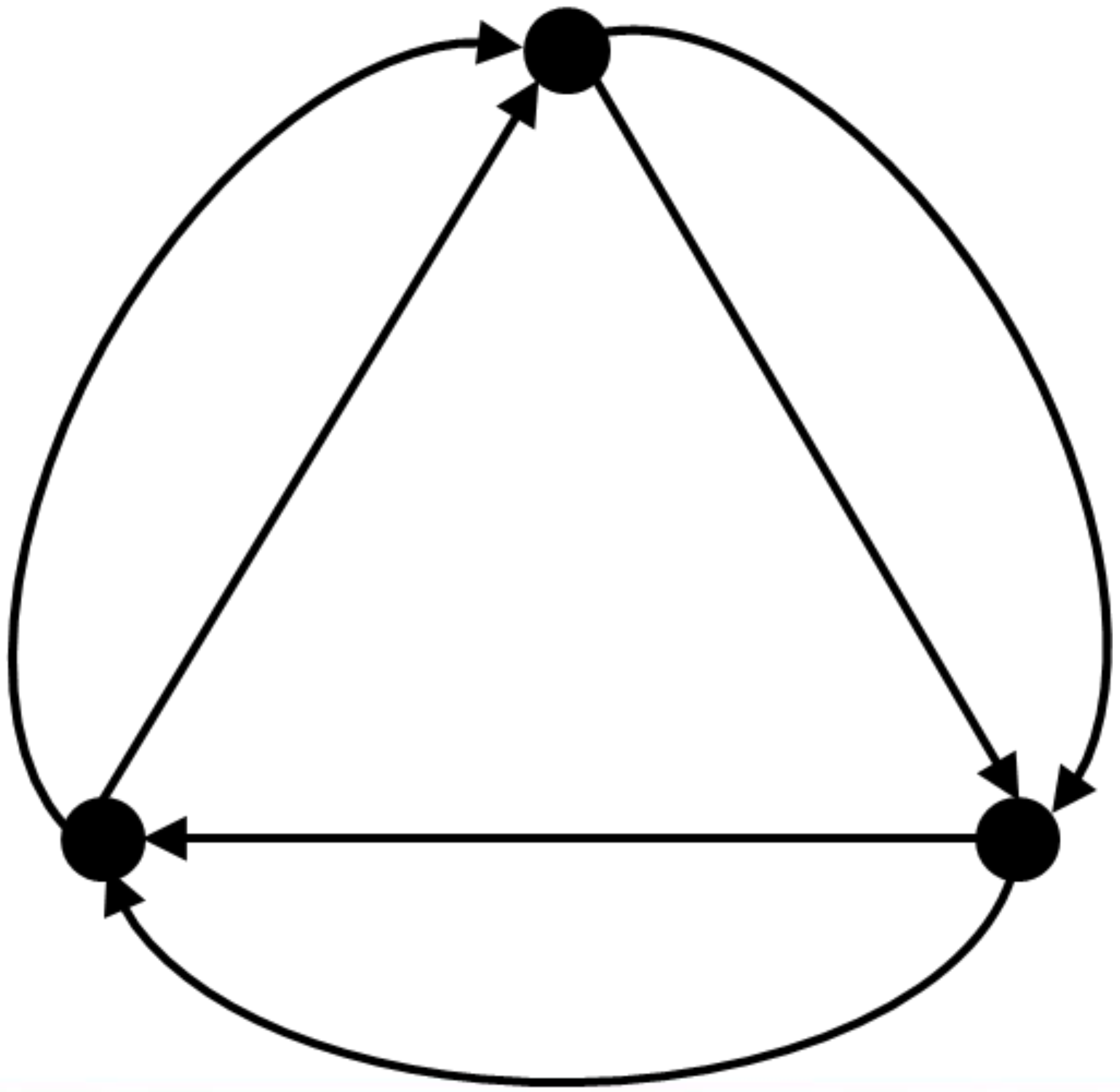
Note.
有向閉路の点に1回のsplittingを行うと，有向閉路の長さが1減る.





Theorem C (Johnson)(再掲).

2-正則有向グラフ D が平面埋め込み可能である必要十分条件は D が$C_3^{(2)}$をimmersionとして含まないことである.



$: C_3^{(2)}$

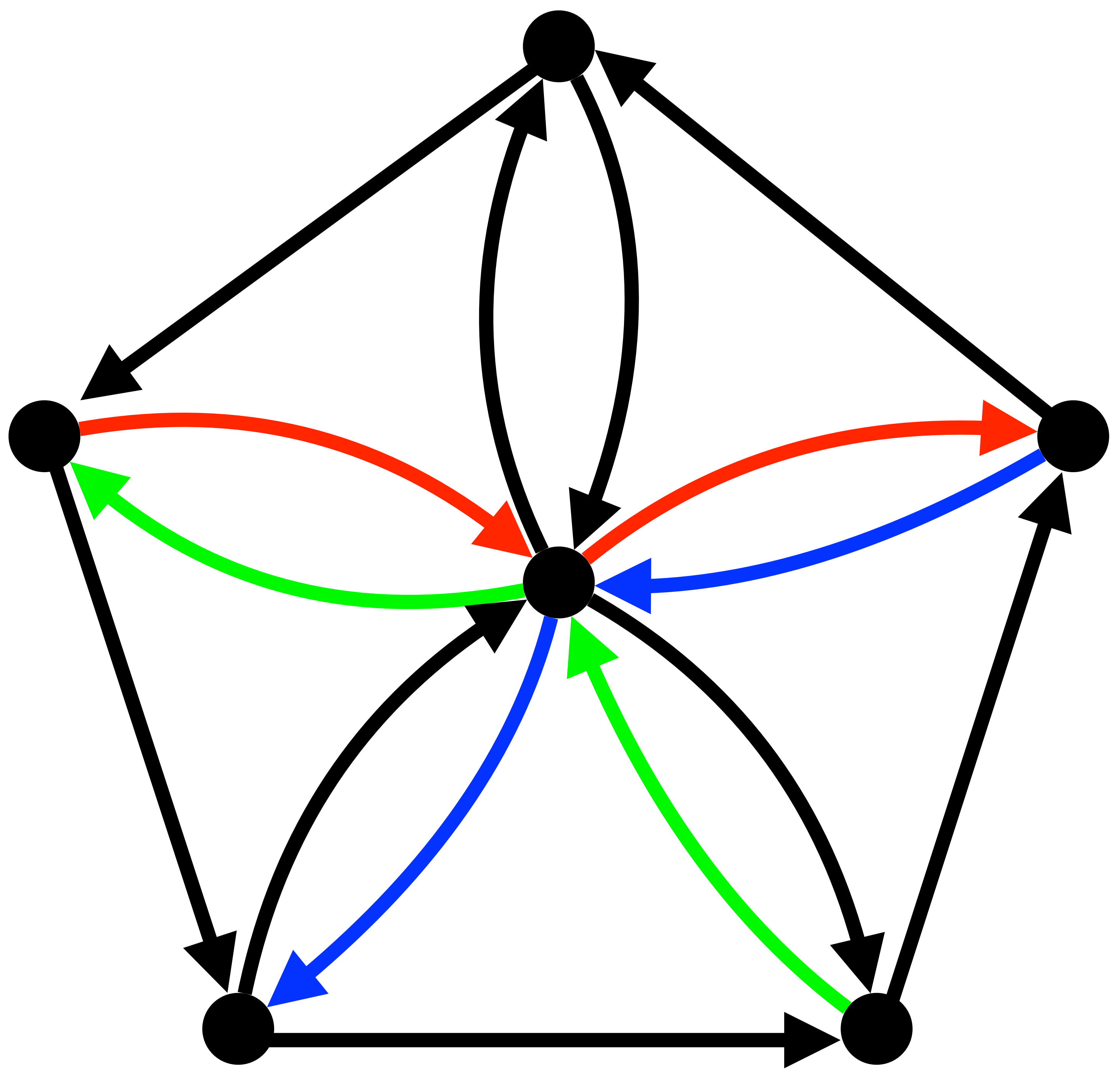
Graph minorとGraph immersion

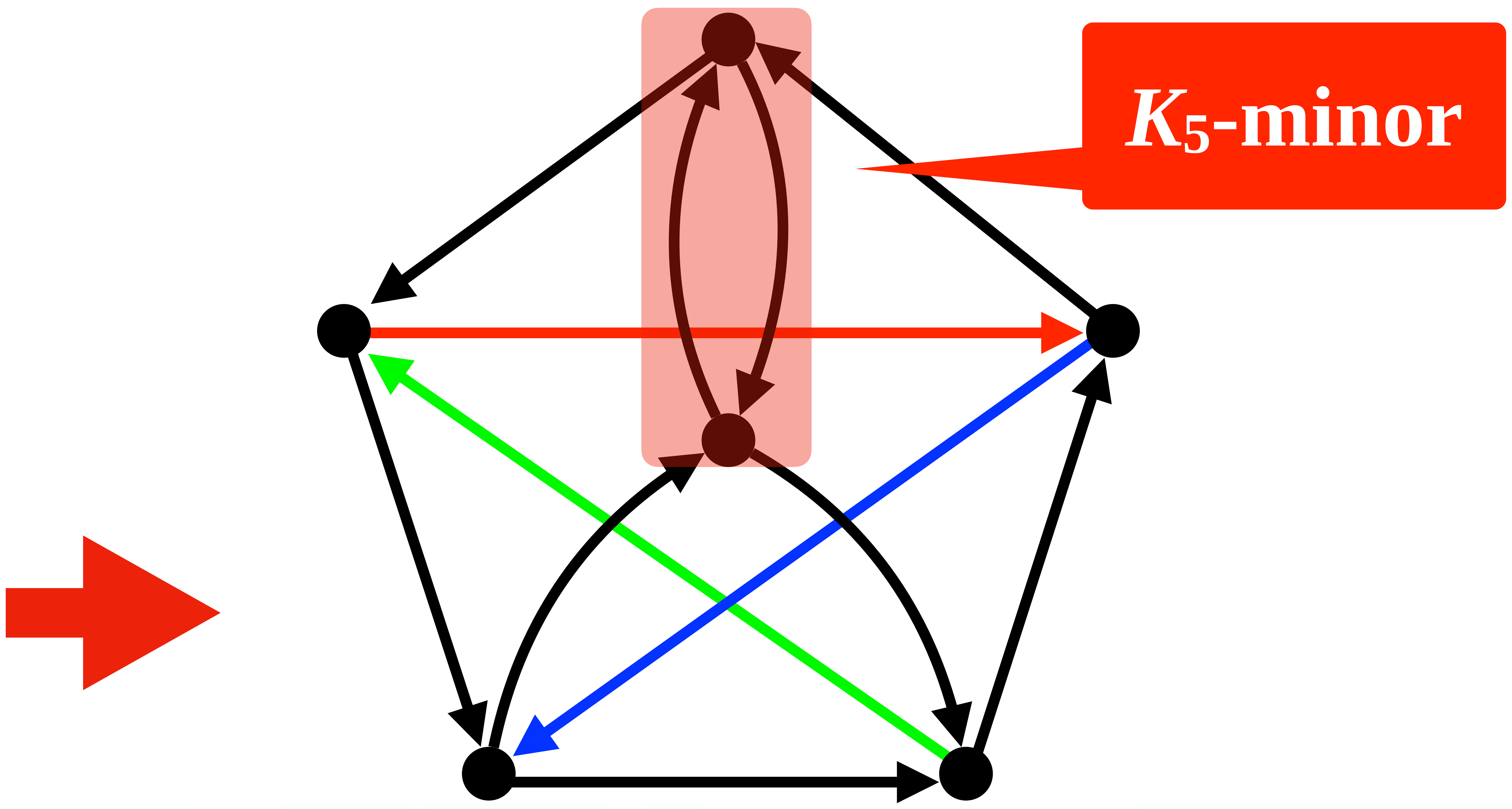
	平面	射影平面	トーラス
Minor	$K_5, K_{3,3}$	35 graphs	$> 10^4 \quad (?)$
Immersion (2-正則)	$C_3^{(2)}$	$C_3^{(2)} + C_3^{(2)}, C_3^{(2)} \cdot C_3^{(2)},$ $C_4^{(2)}, C_6^{(2)}$	$(?)$

r-正則有向グラフ(r≧4)だと同じアイデアは…

Proposition 4.

$C_3^{(2)}$ をimmersionとして含む平面埋め込み可能な正則有向グラフが存在する.

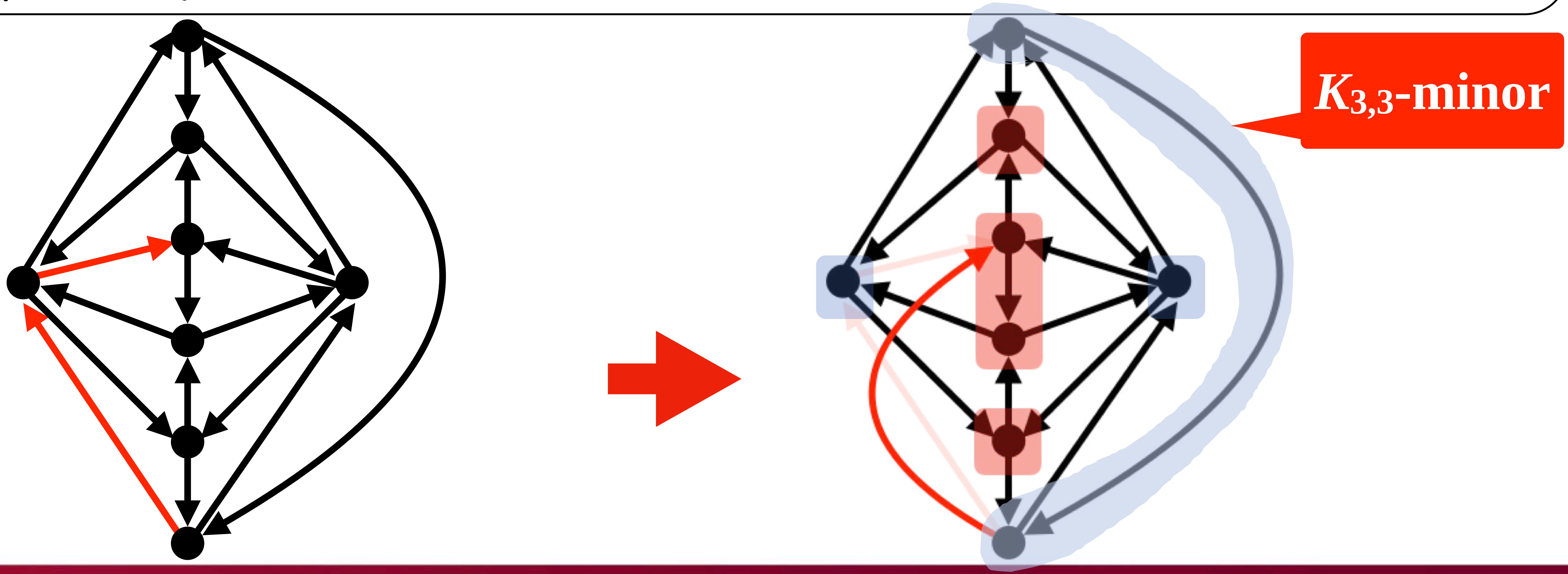




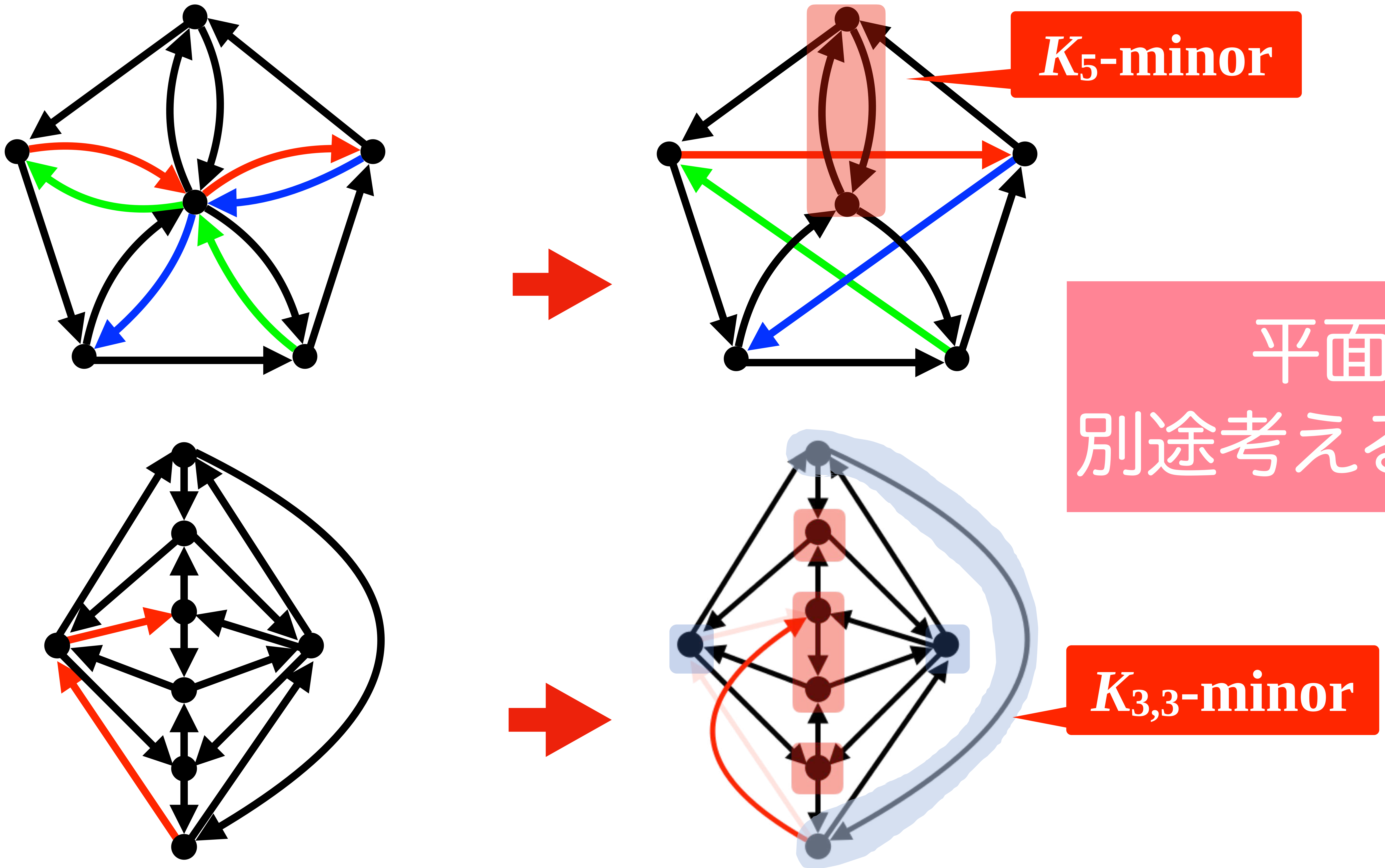
r-正則有向グラフ(r≧4)だと同じアイデアは…

Proposition 4.

$C_3^{(2)}$ をimmersionとして含む平面埋め込み可能な正則有向グラフが存在する.



r-正則有向グラフ(r≧4)だと同じアイデアは…



平面性について
別途考える必要が出てくる

ひとまず2-正則以外の有向グラフを考えるために

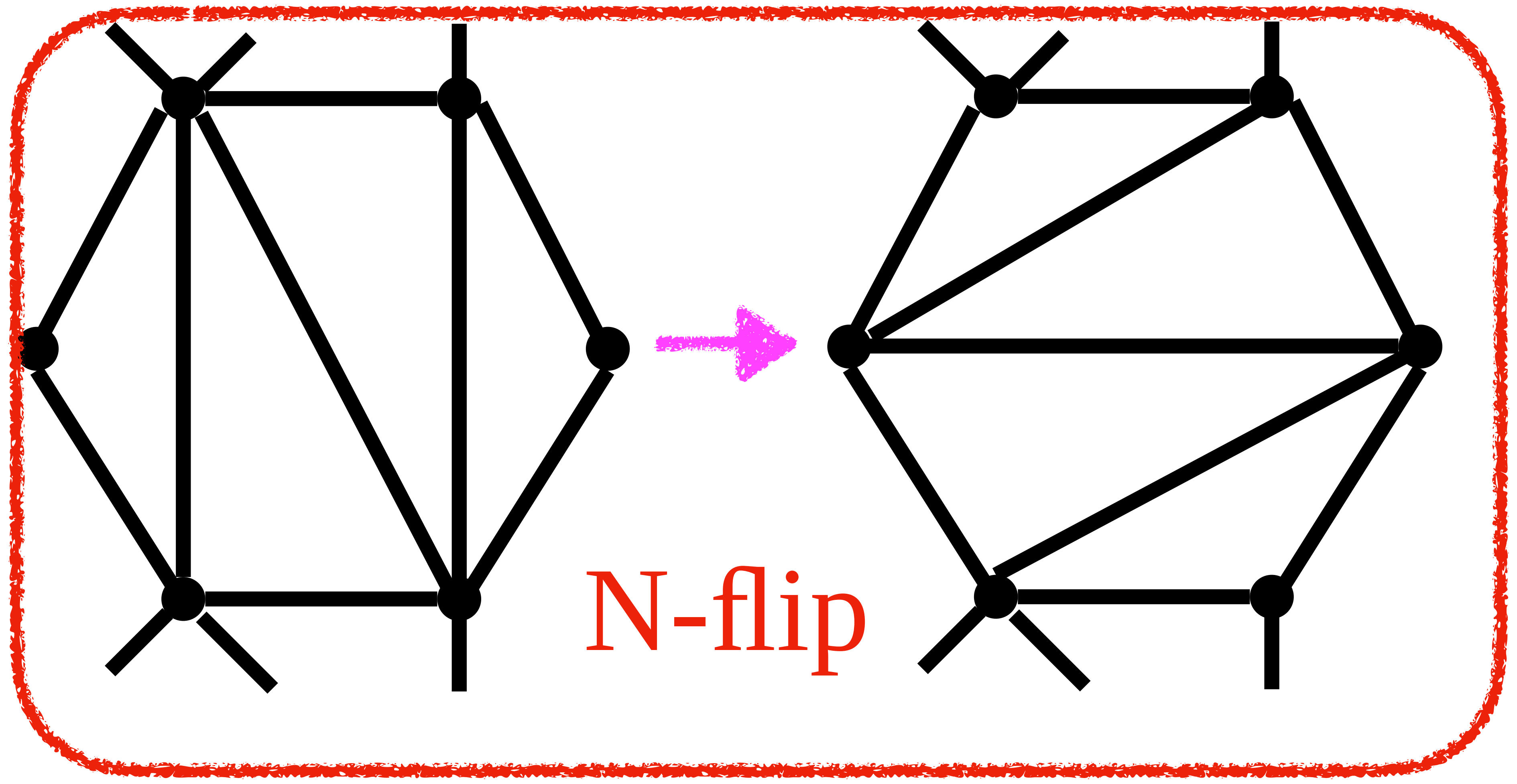
Observation 3(再掲).
閉曲面 F に有向グラフ D が埋め込み可能であることと，F において D (の無向基礎グラフ)がface 2-colorableであることは同値である.

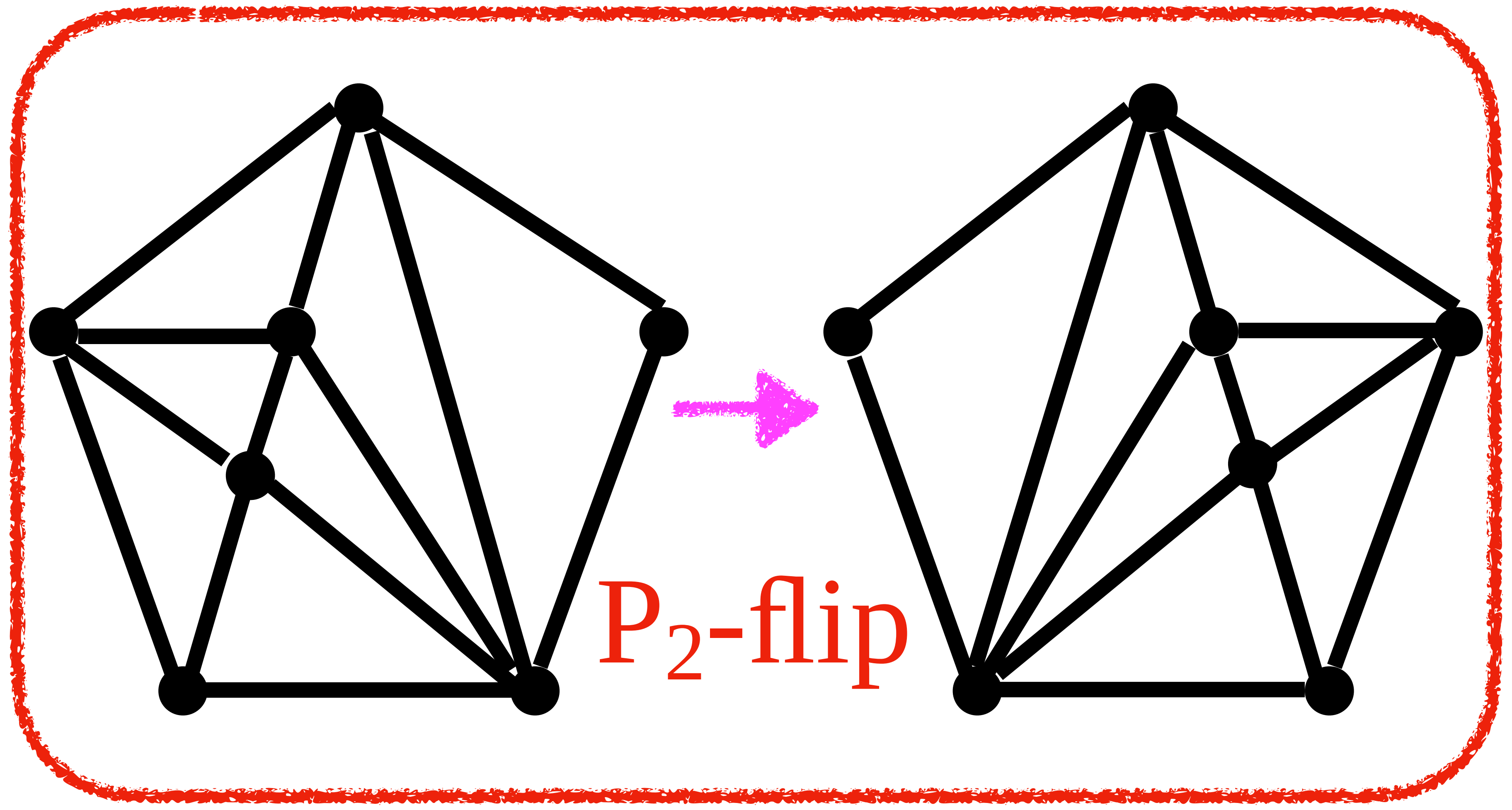
face 2-colorableという性質を保存する局所変形でグラフの列挙をしてみる

ひとまず2-正則以外の有向グラフを考えるために

Theorem F (Nakamoto et al.).

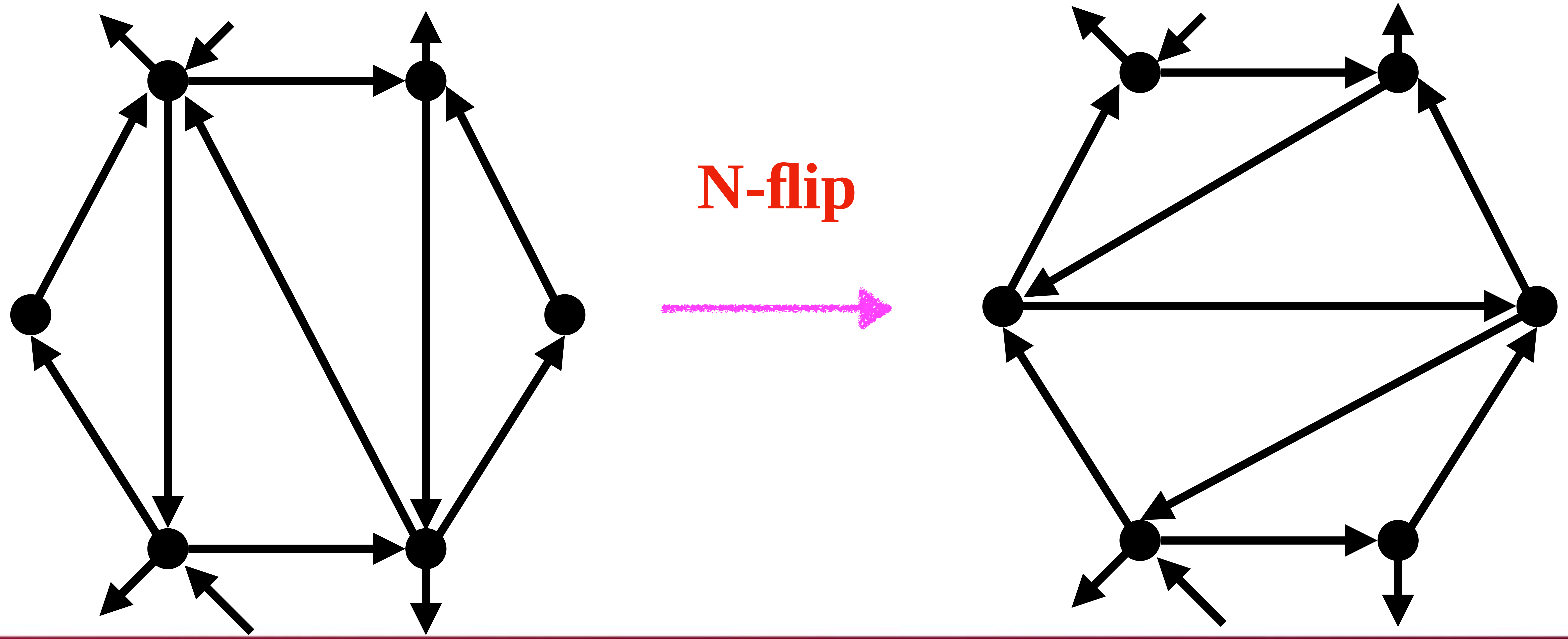
Any two even triangulations on the sphere with the same number of vertices can be transformed into each other by N-flips and P_2-flips.





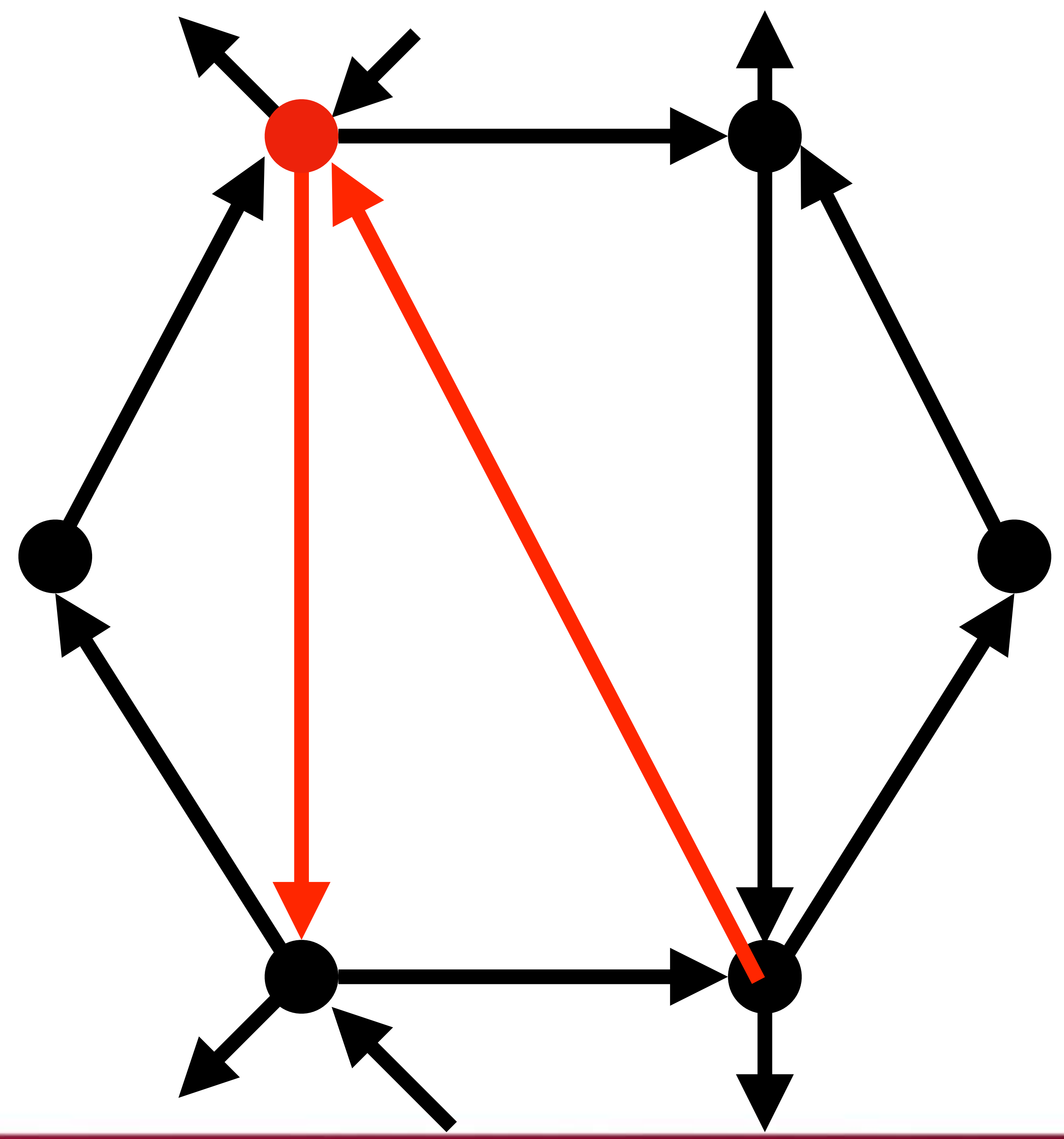
Theorem 5.

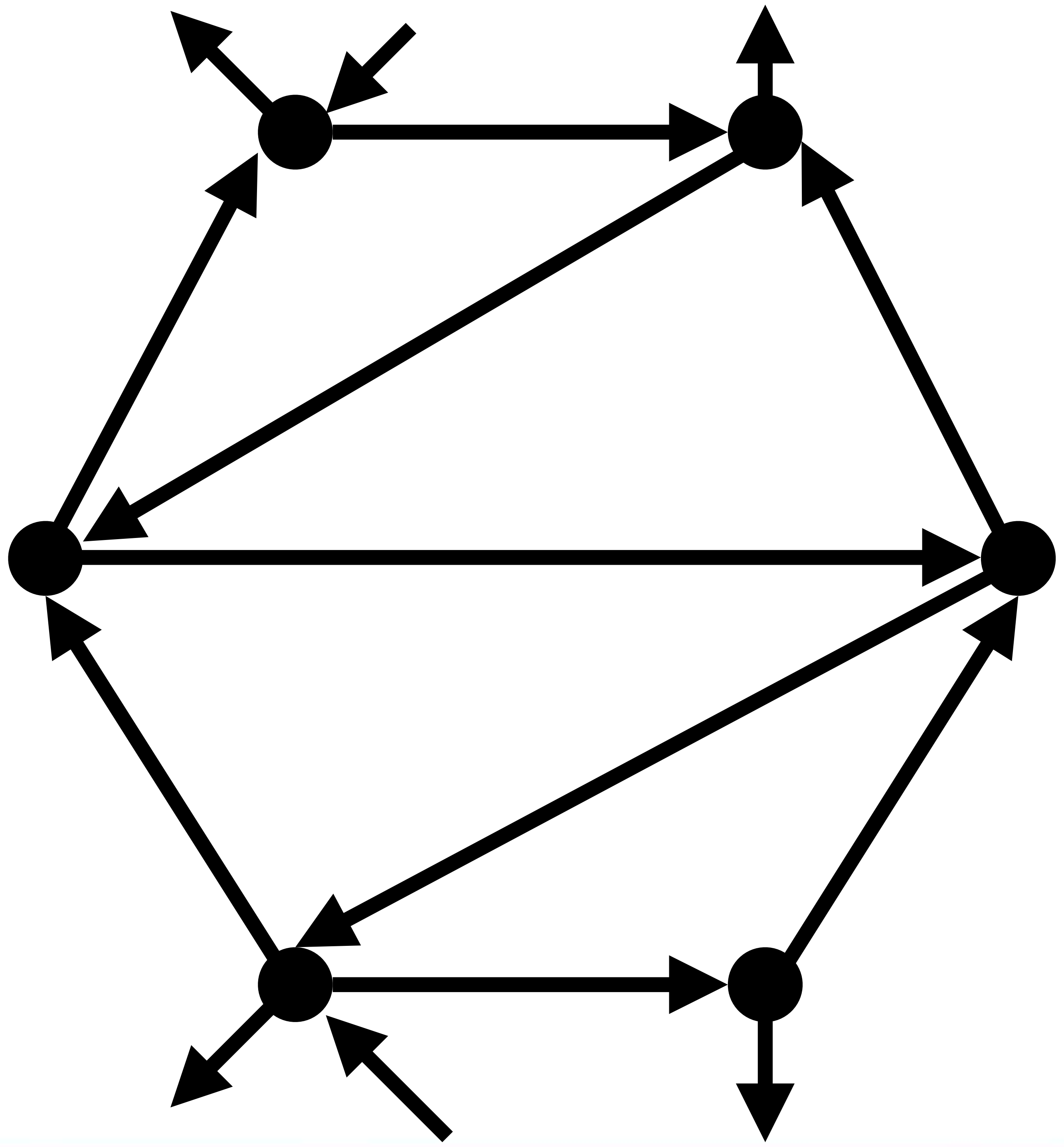
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

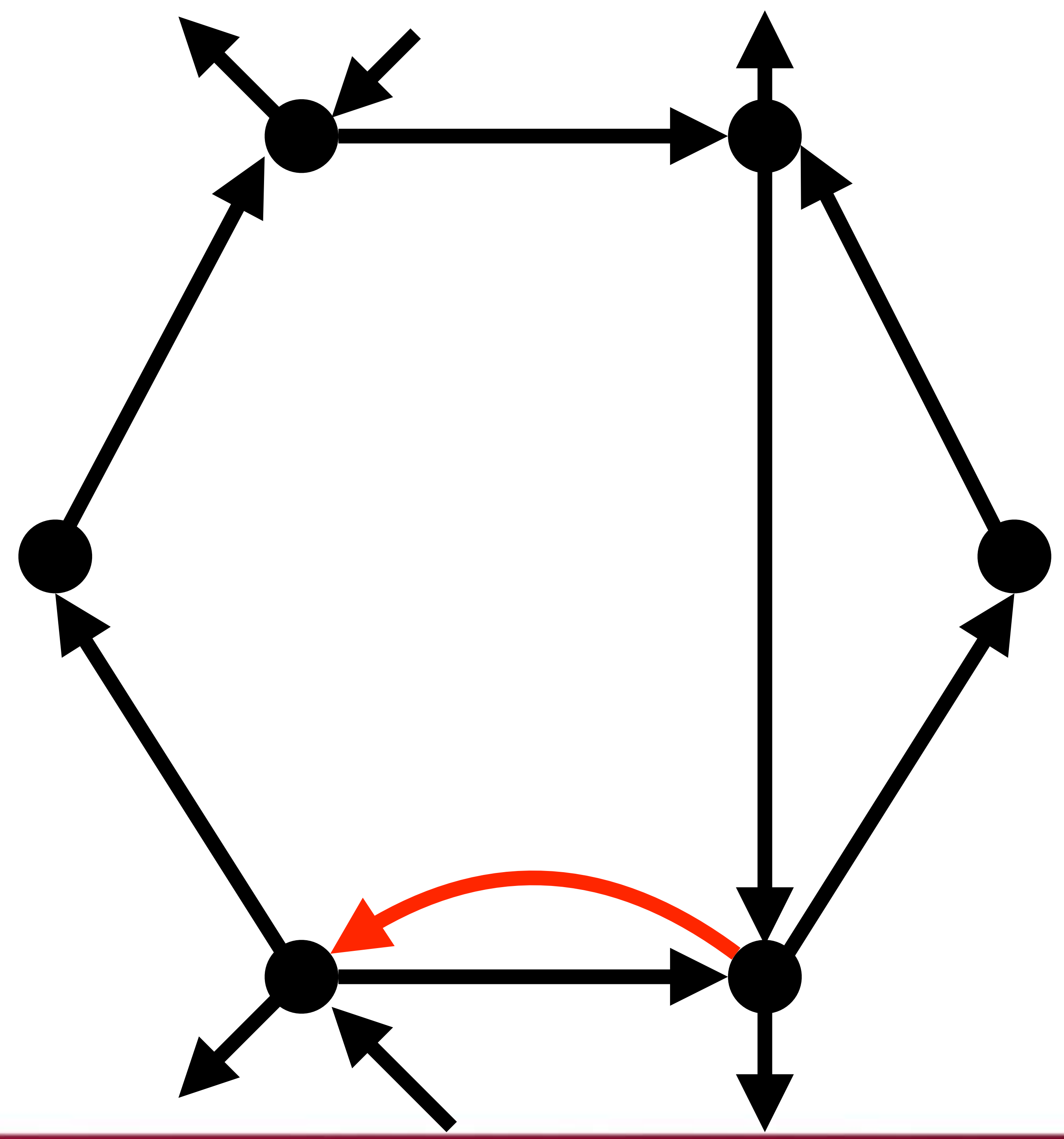
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

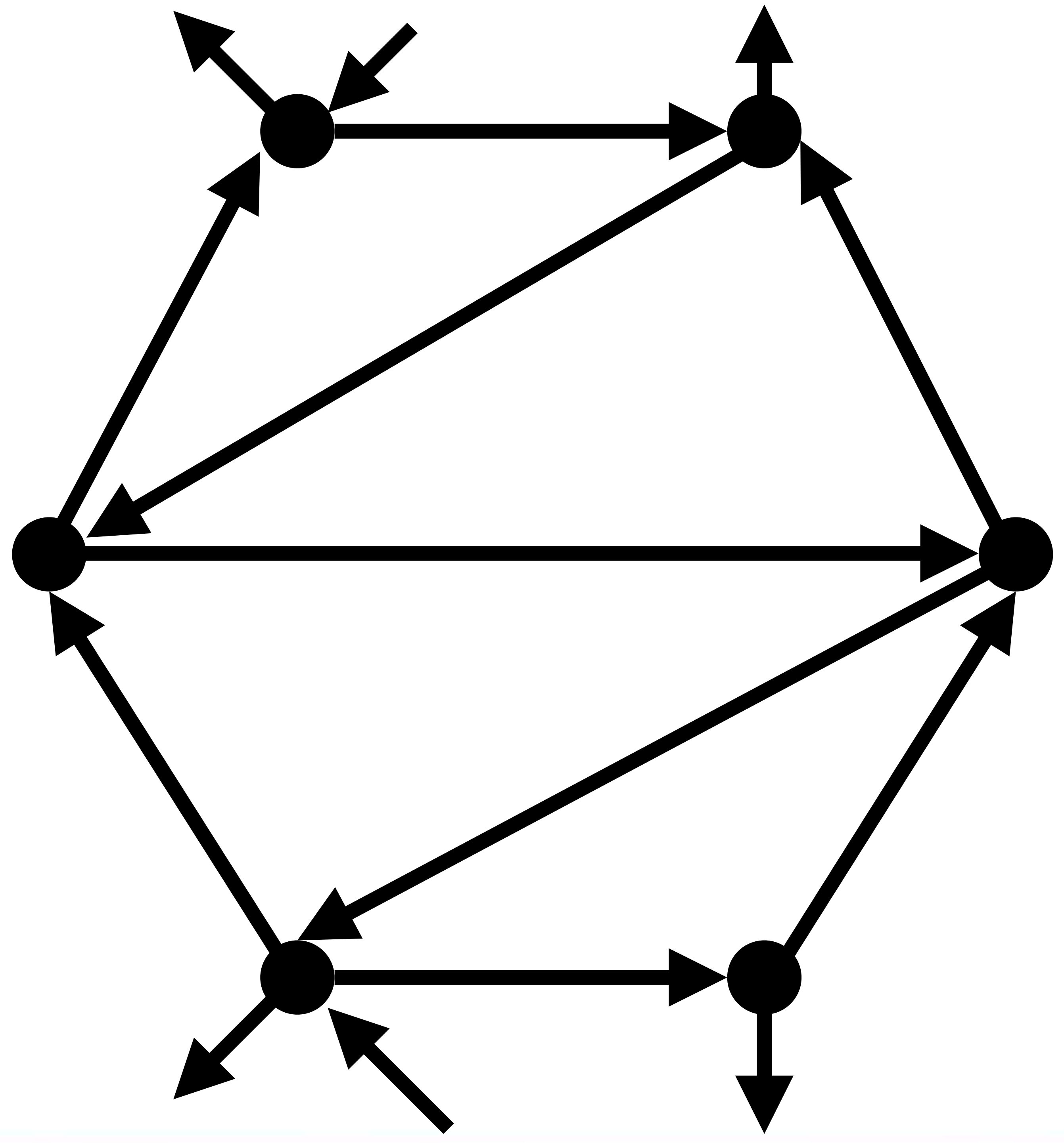




Theorem 5.

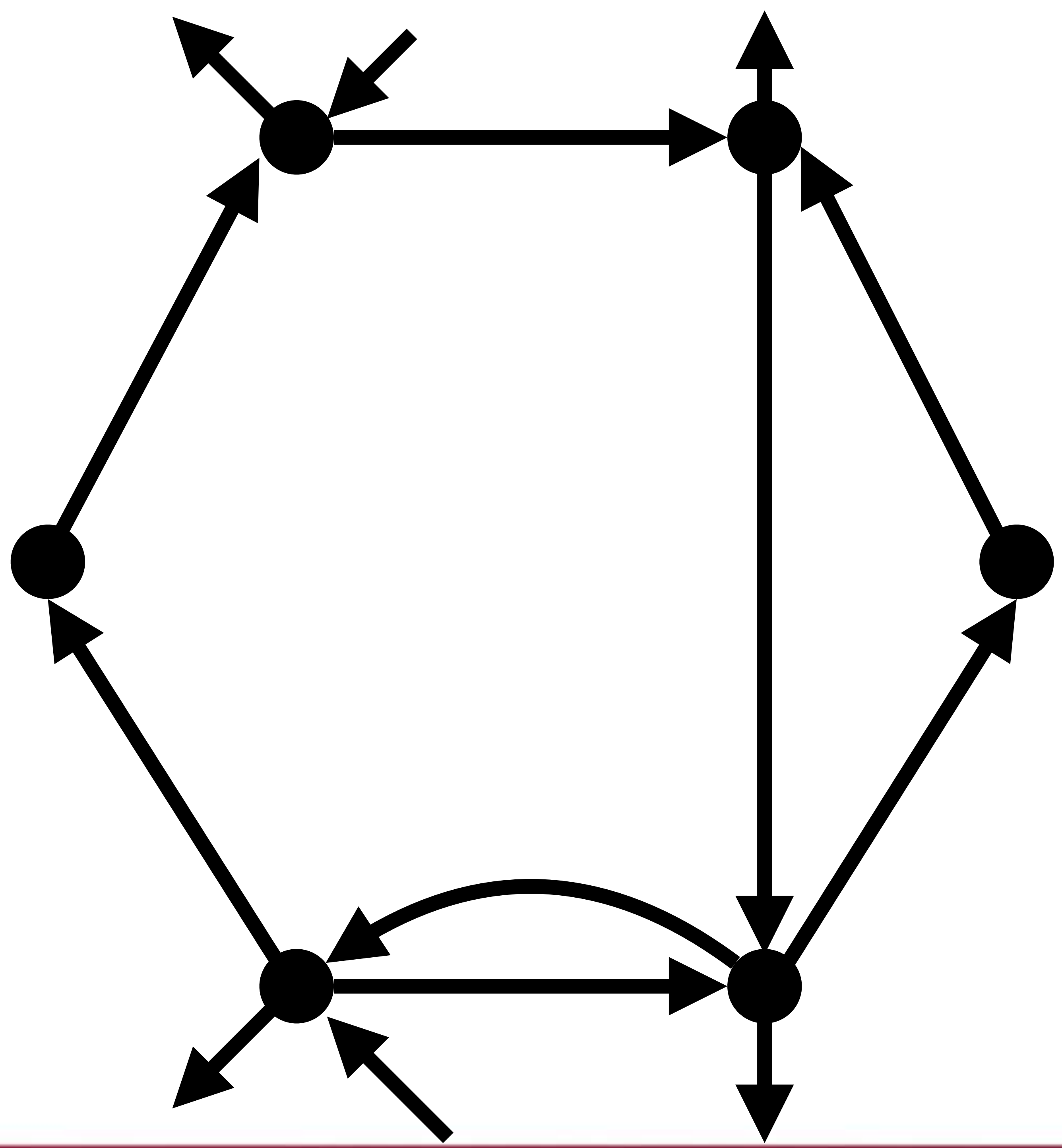
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

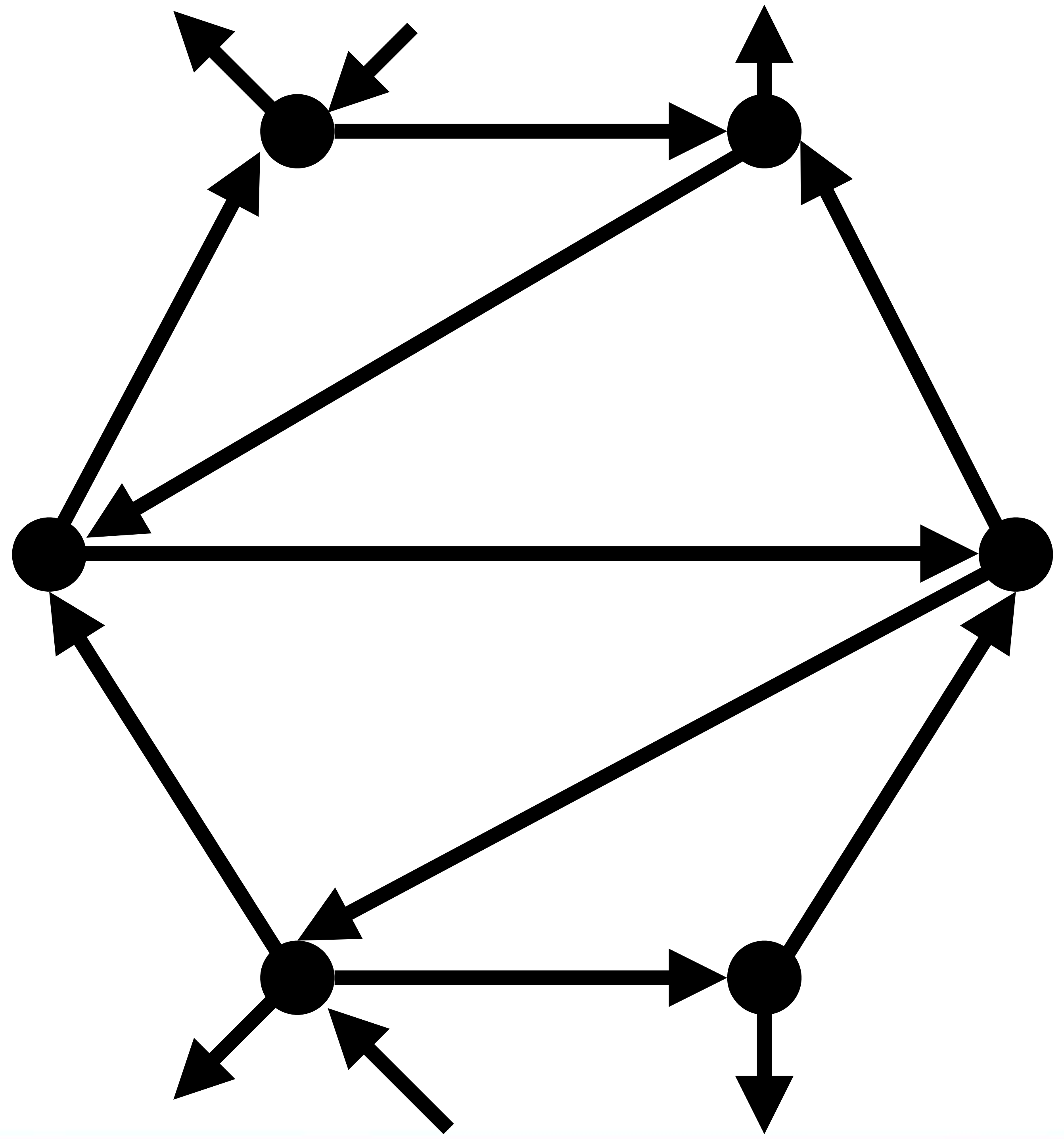




Theorem 5.

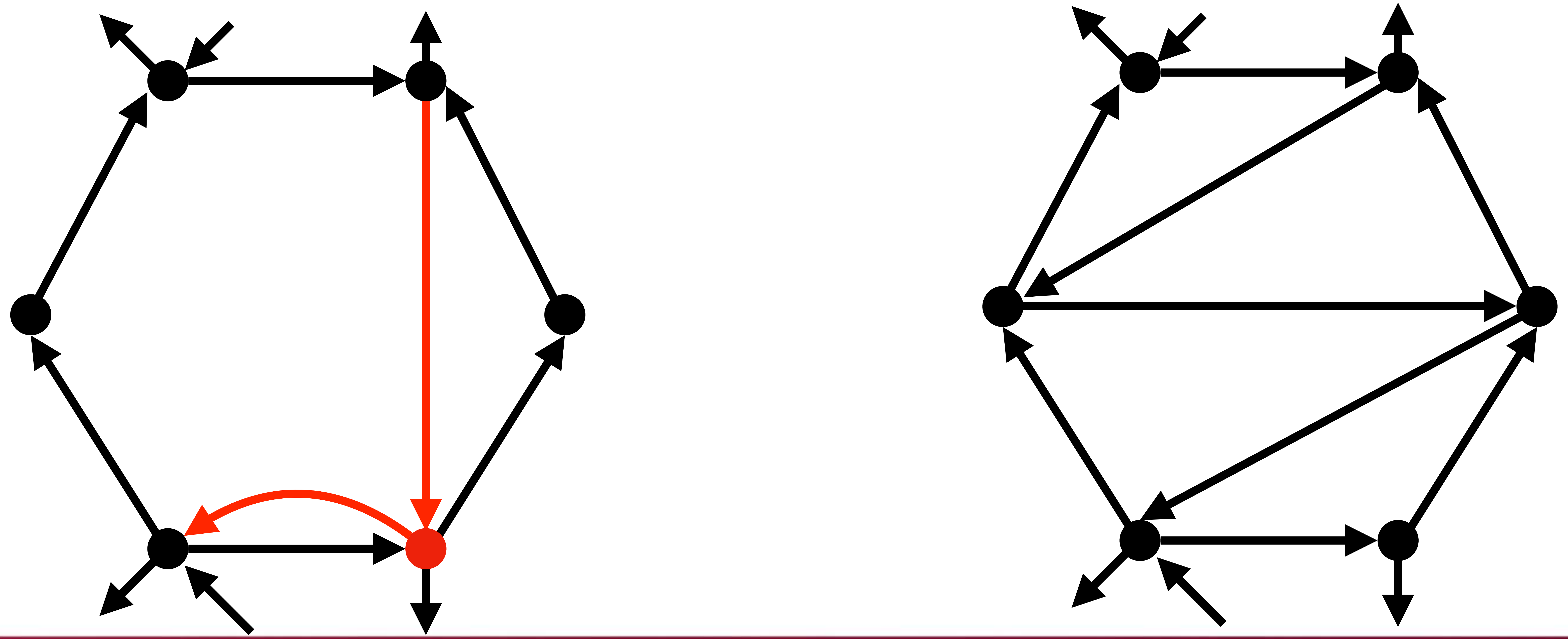
D, *D’*: regular digraphs on the sphere, and |*D*| = |*D’*|.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





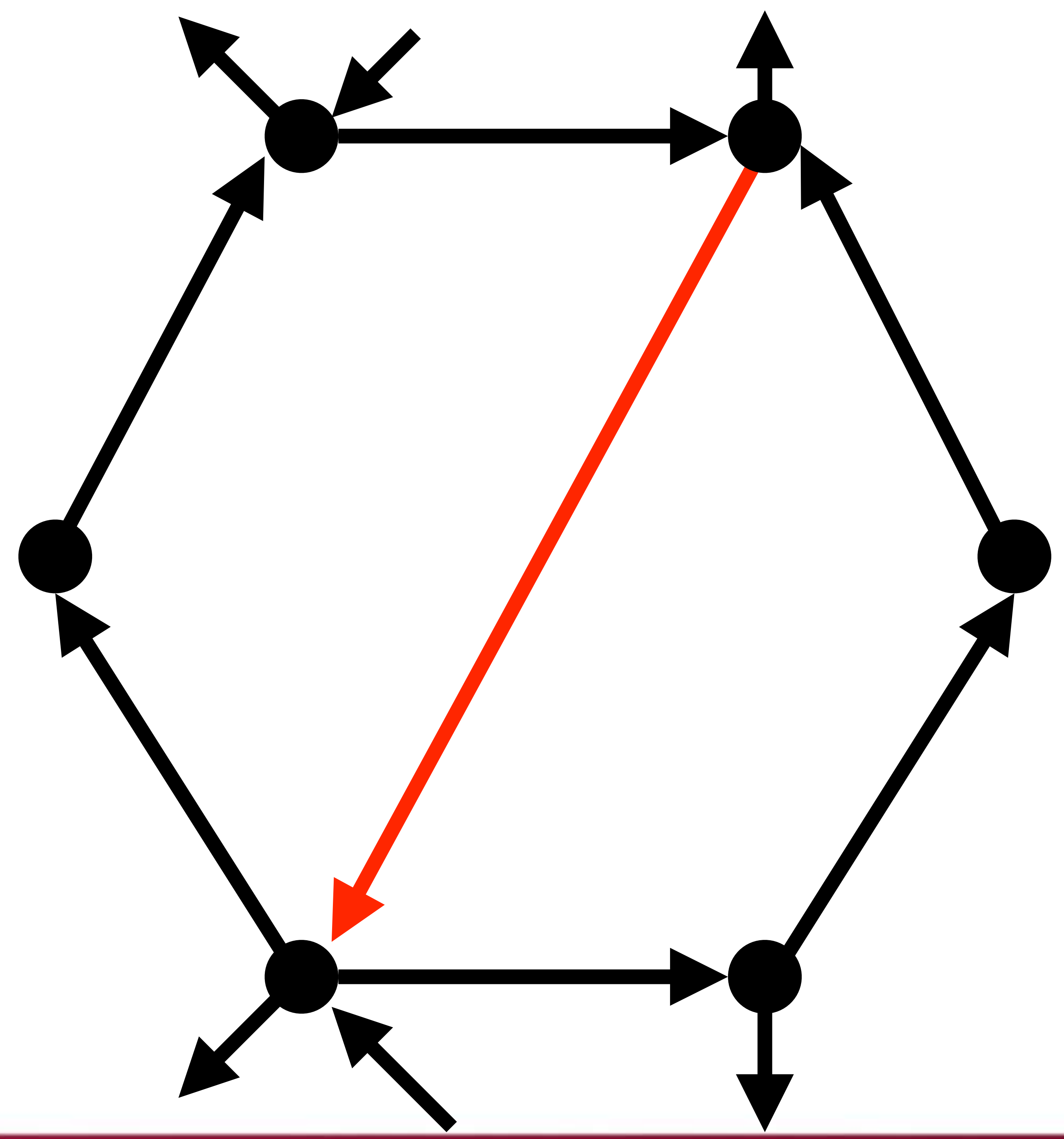
Theorem 5.

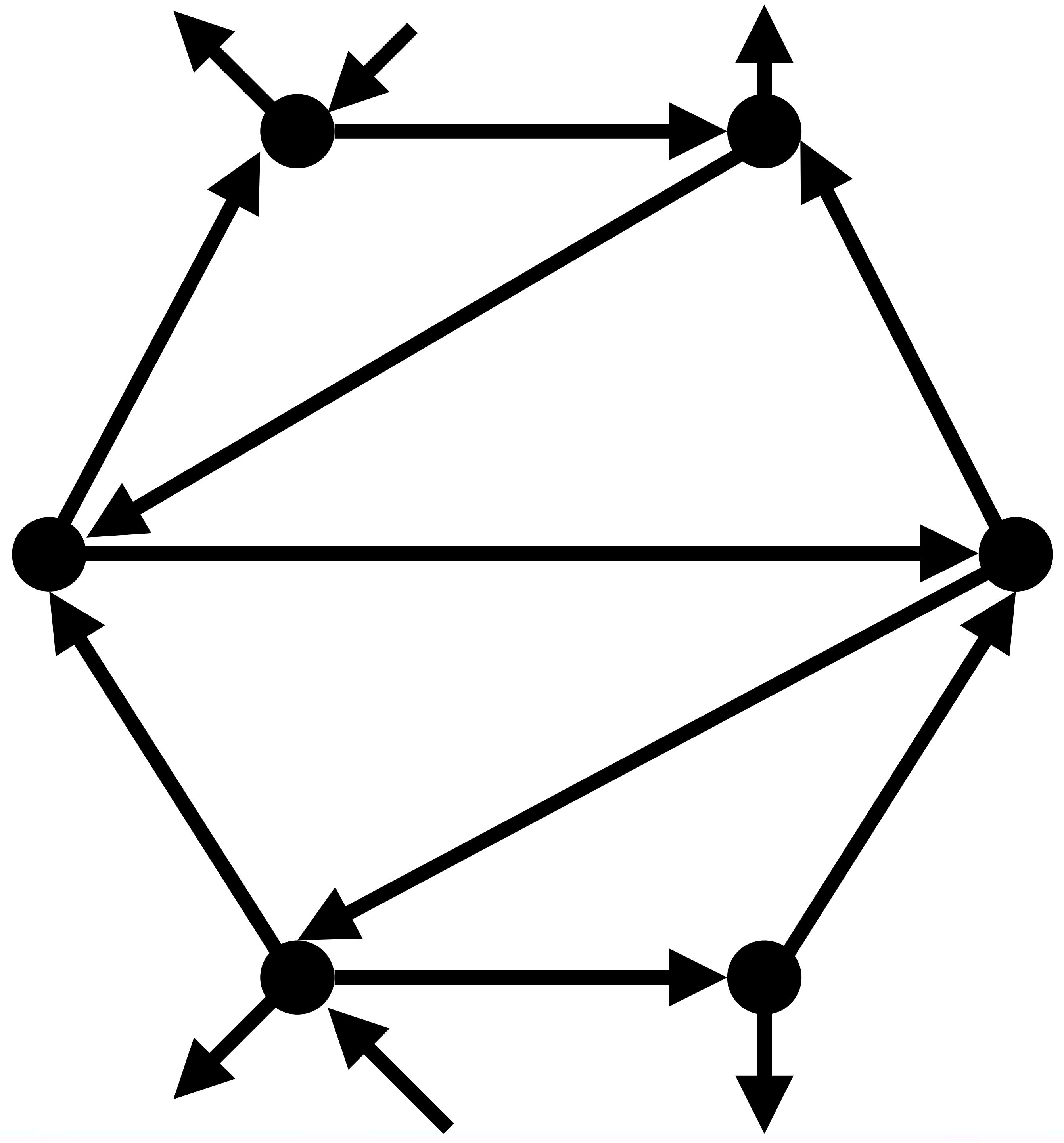
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

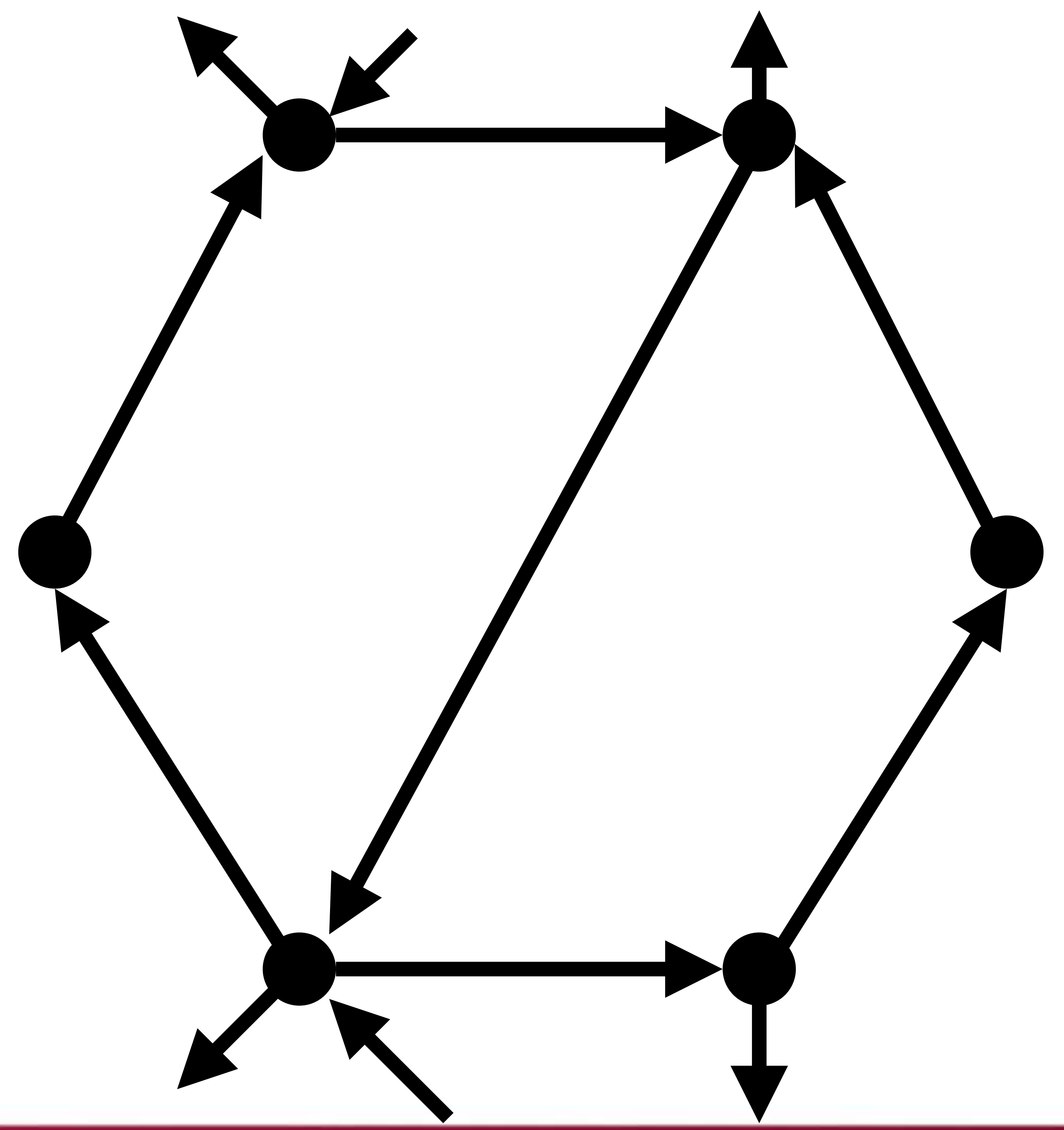
D, D’: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D’|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

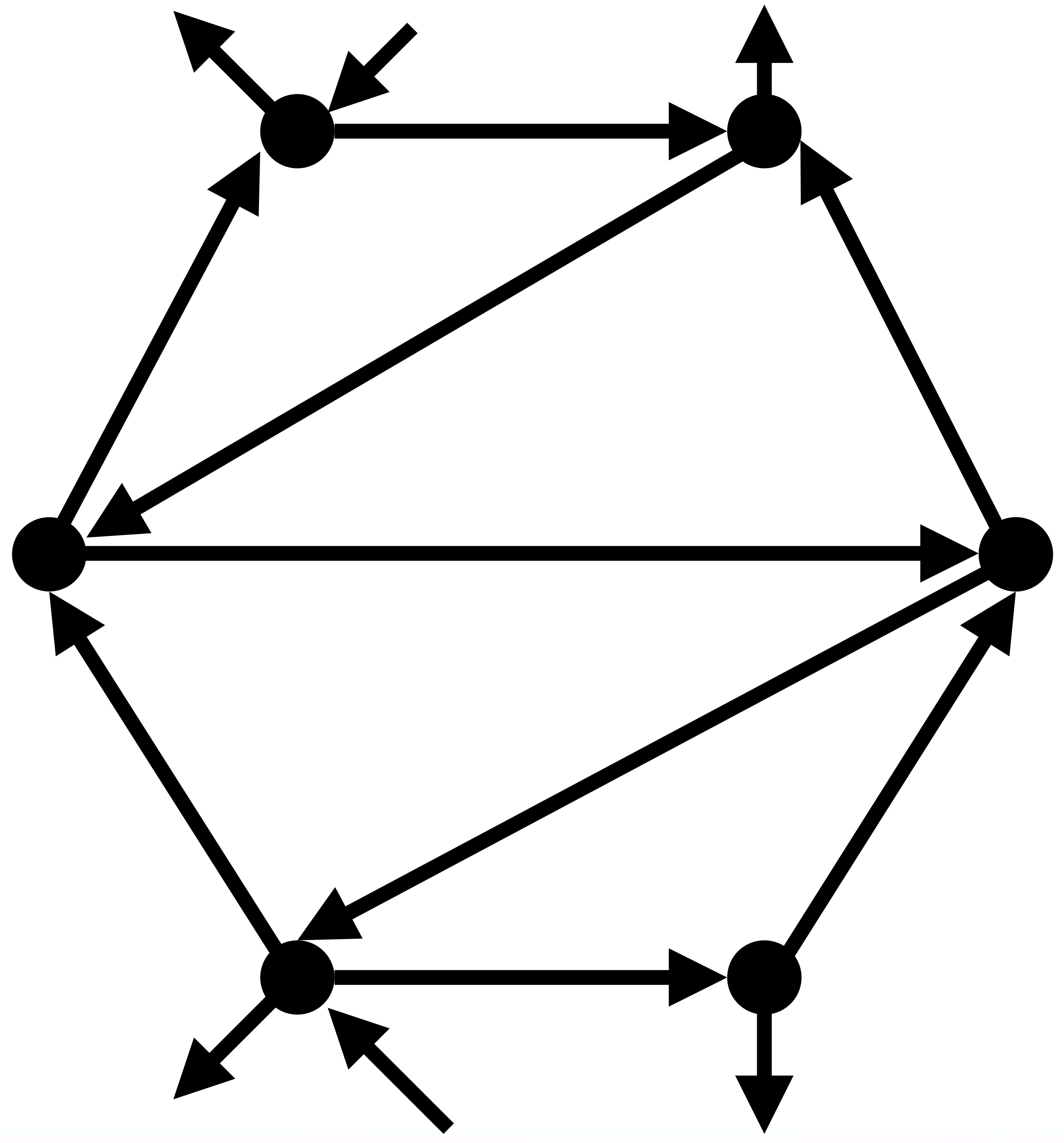




Theorem 5.

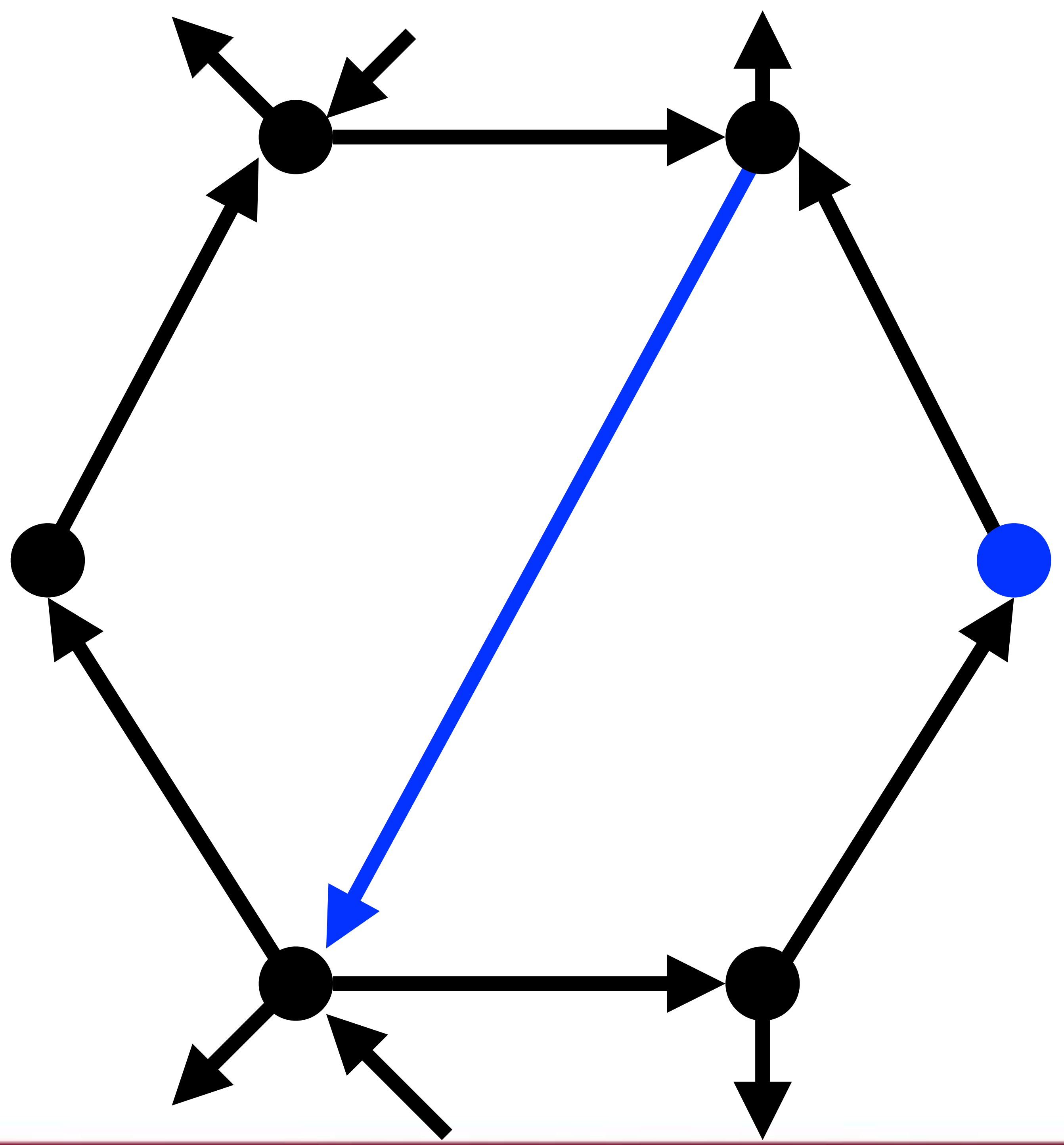
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

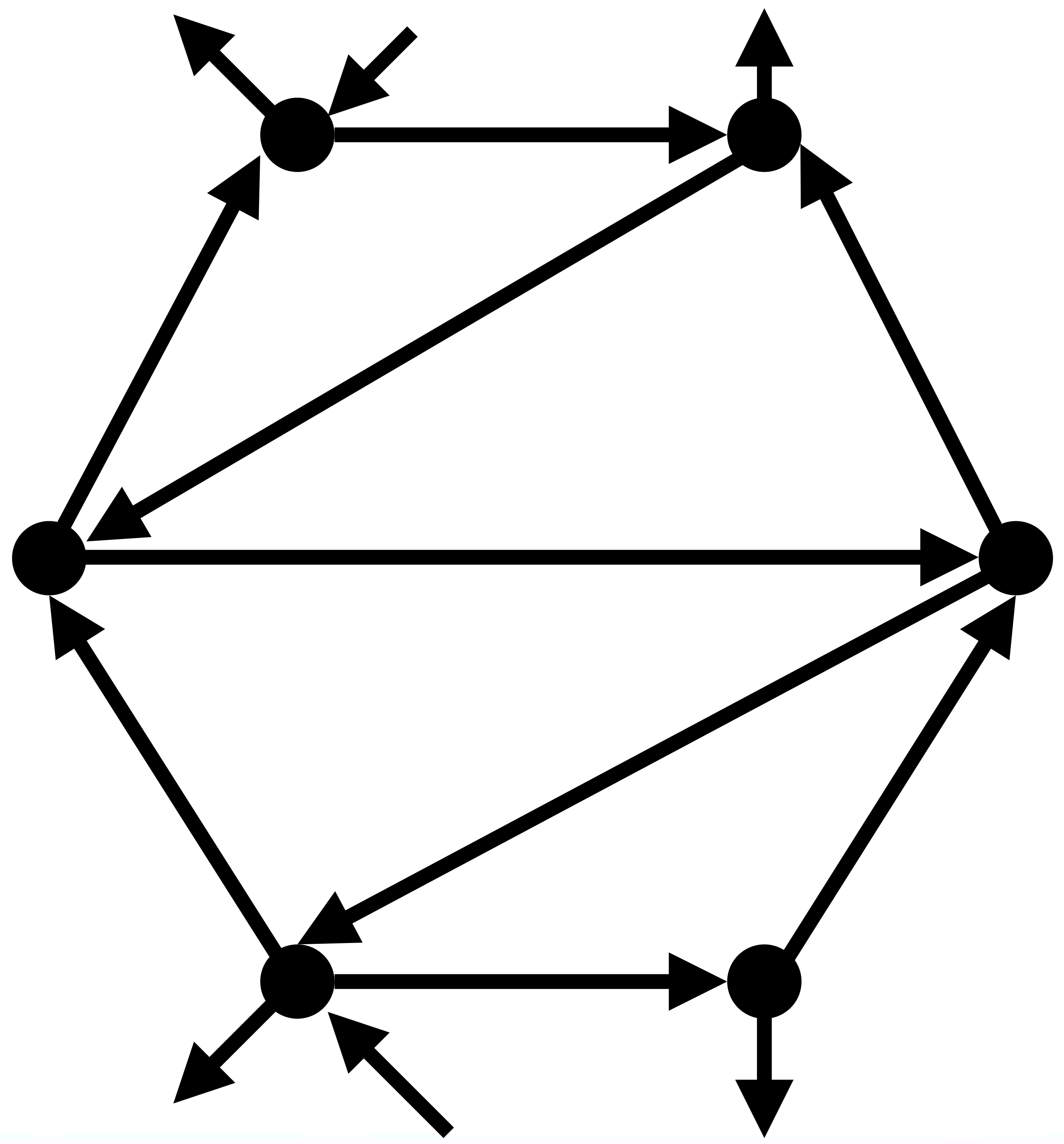




Theorem 5.

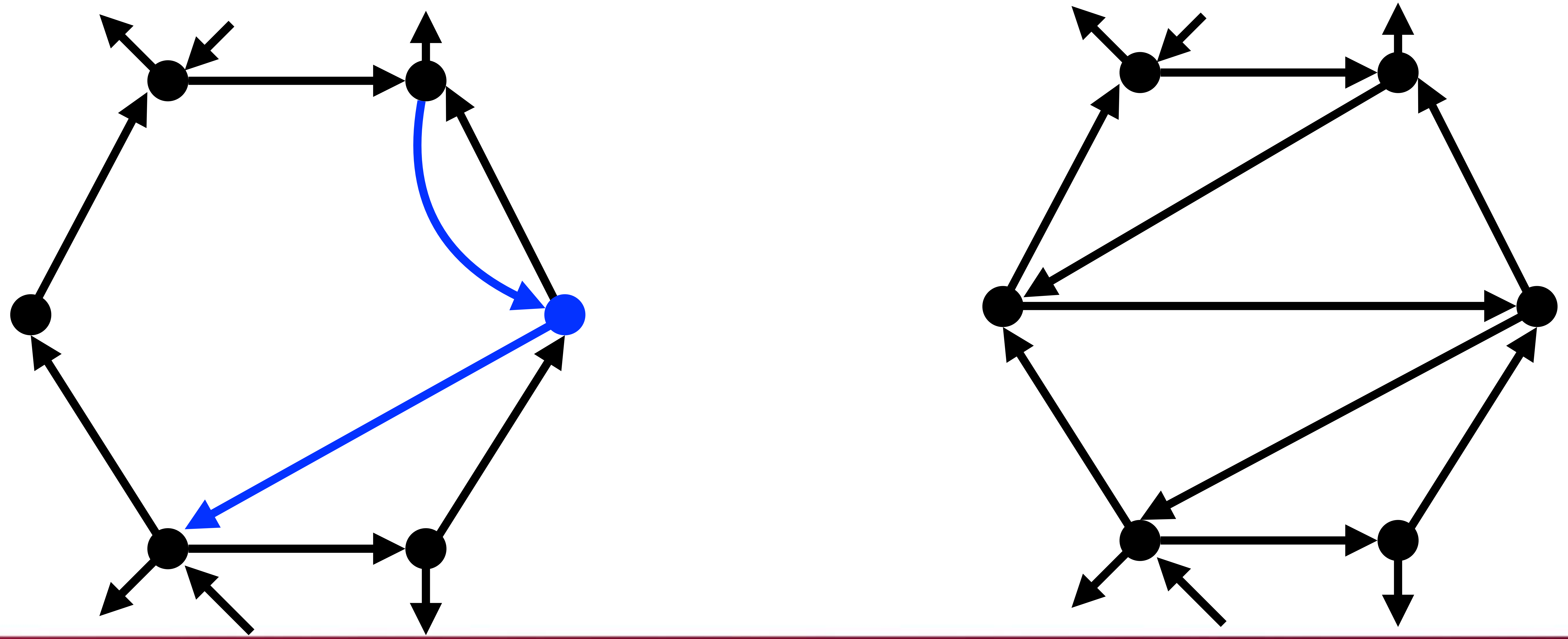
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





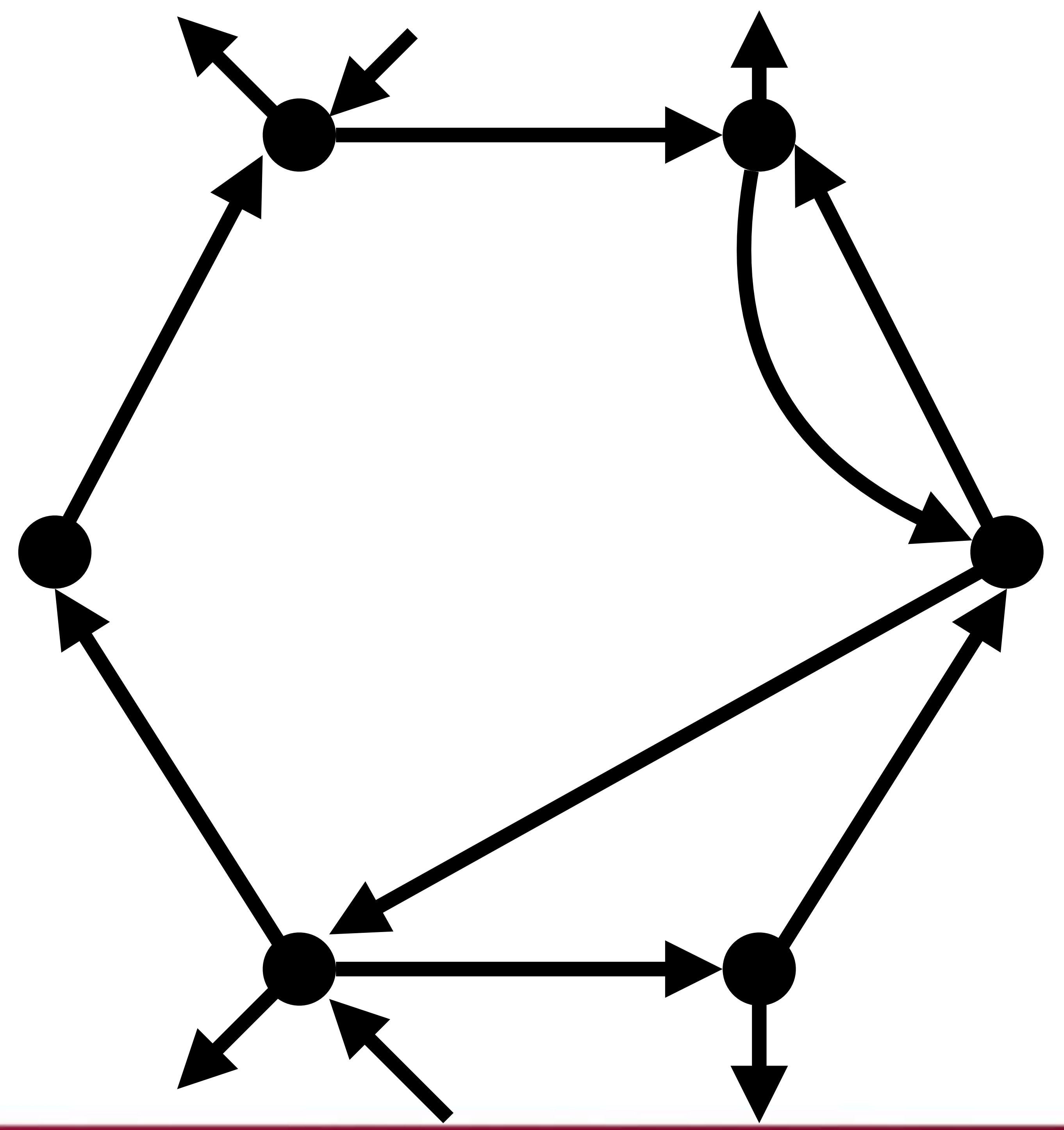
Theorem 5.

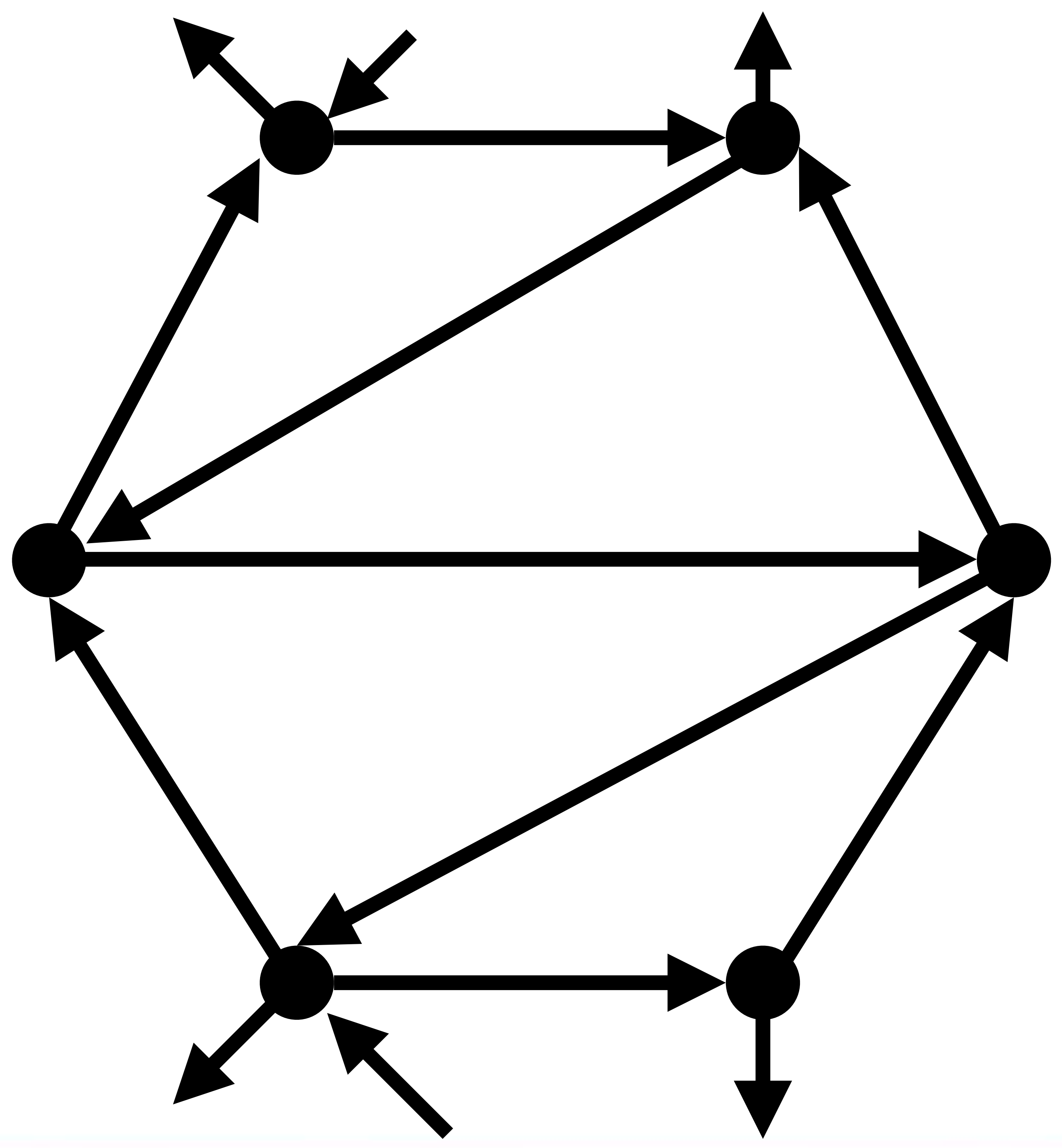
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

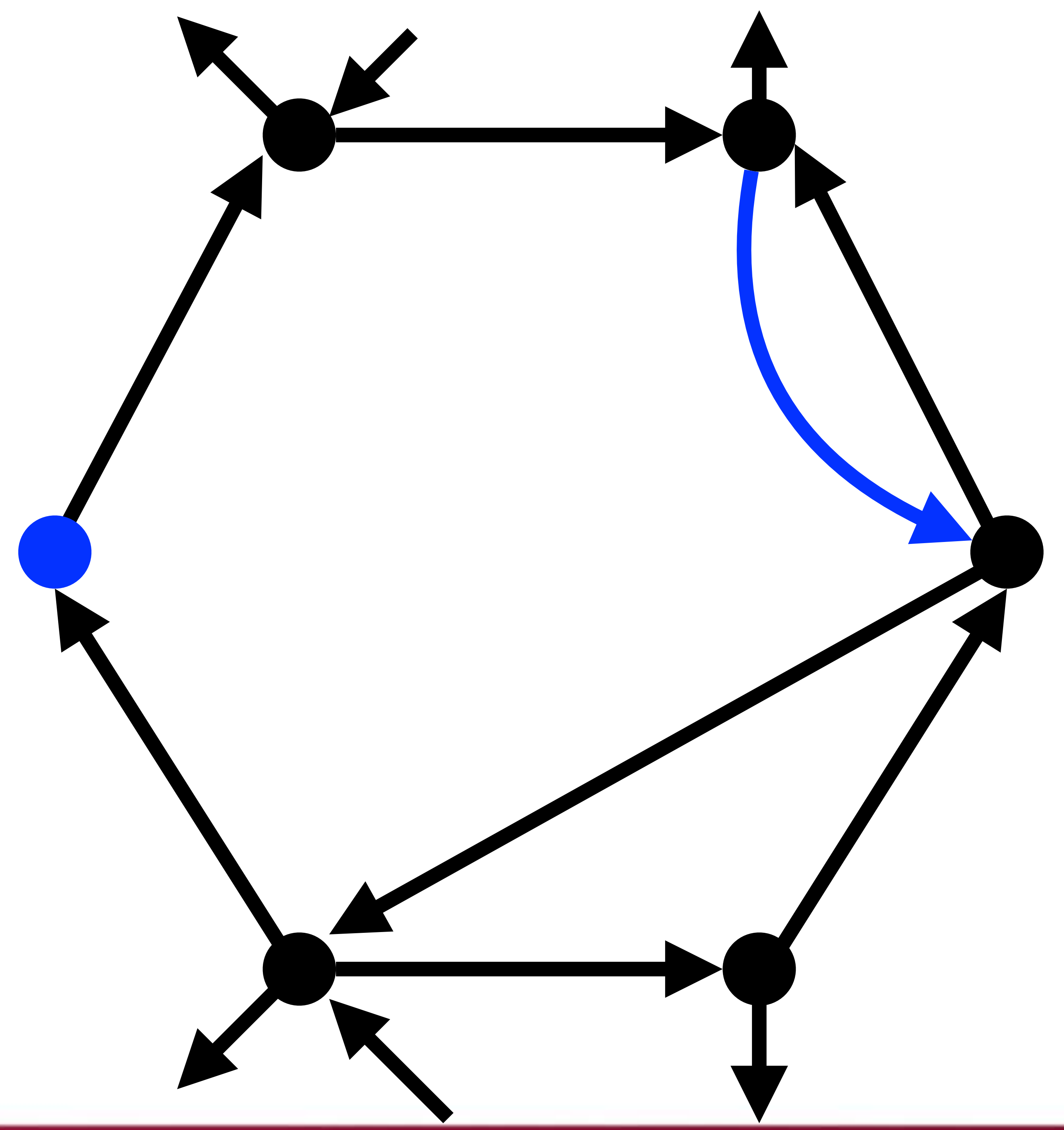
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

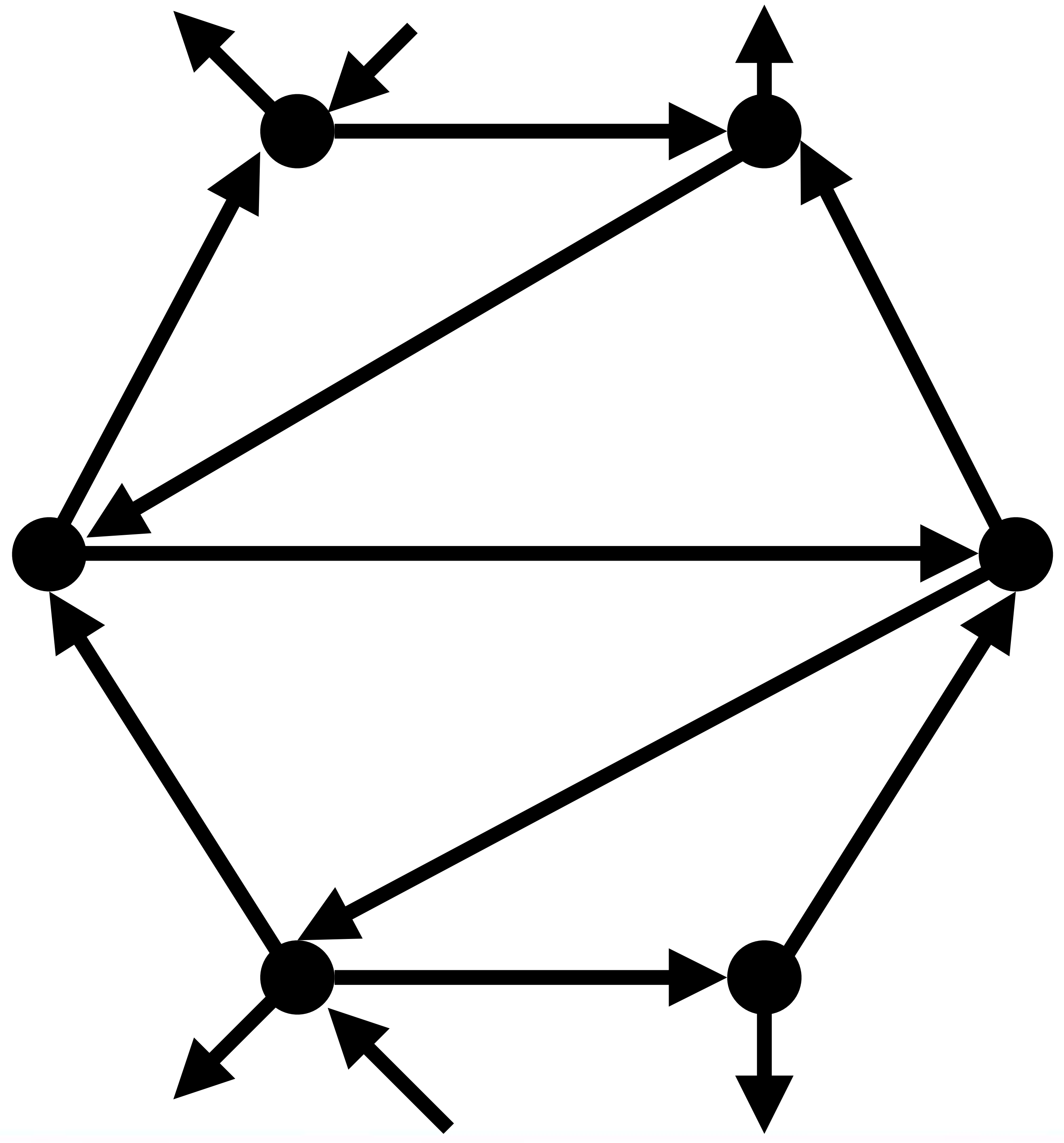




Theorem 5.

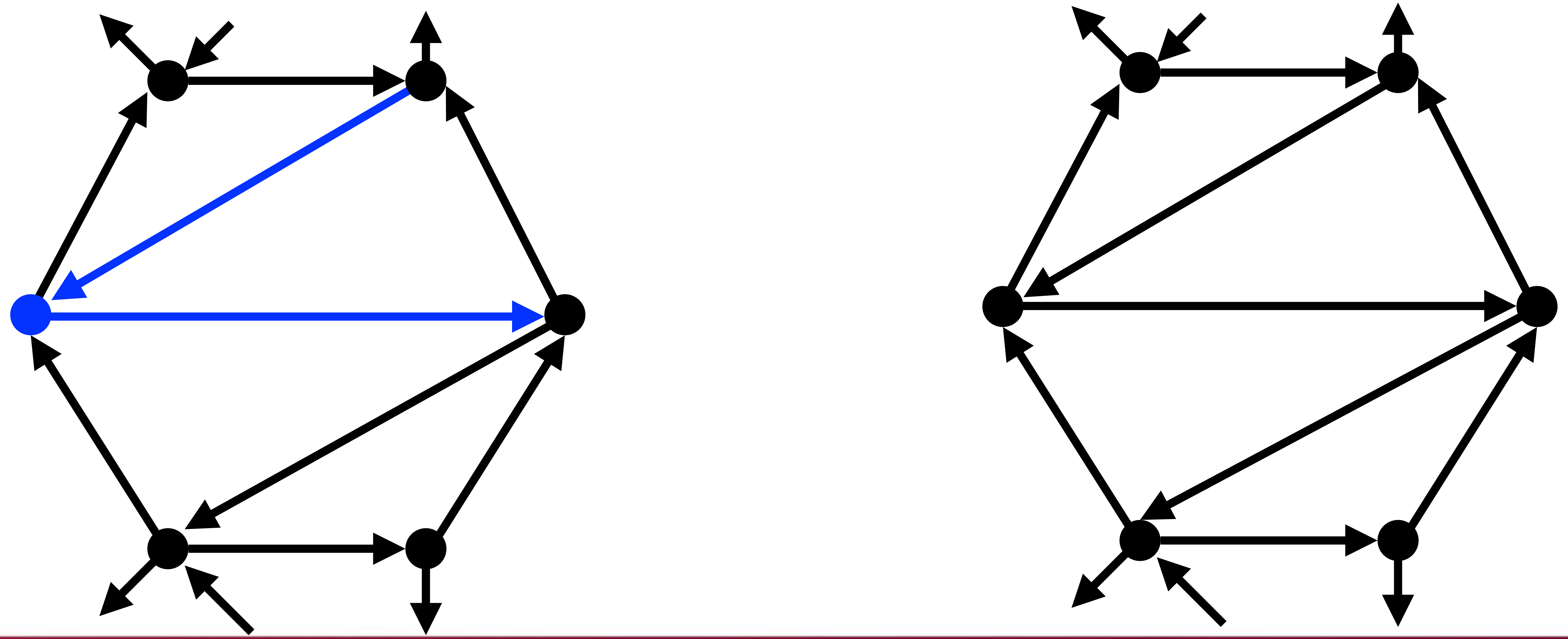
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





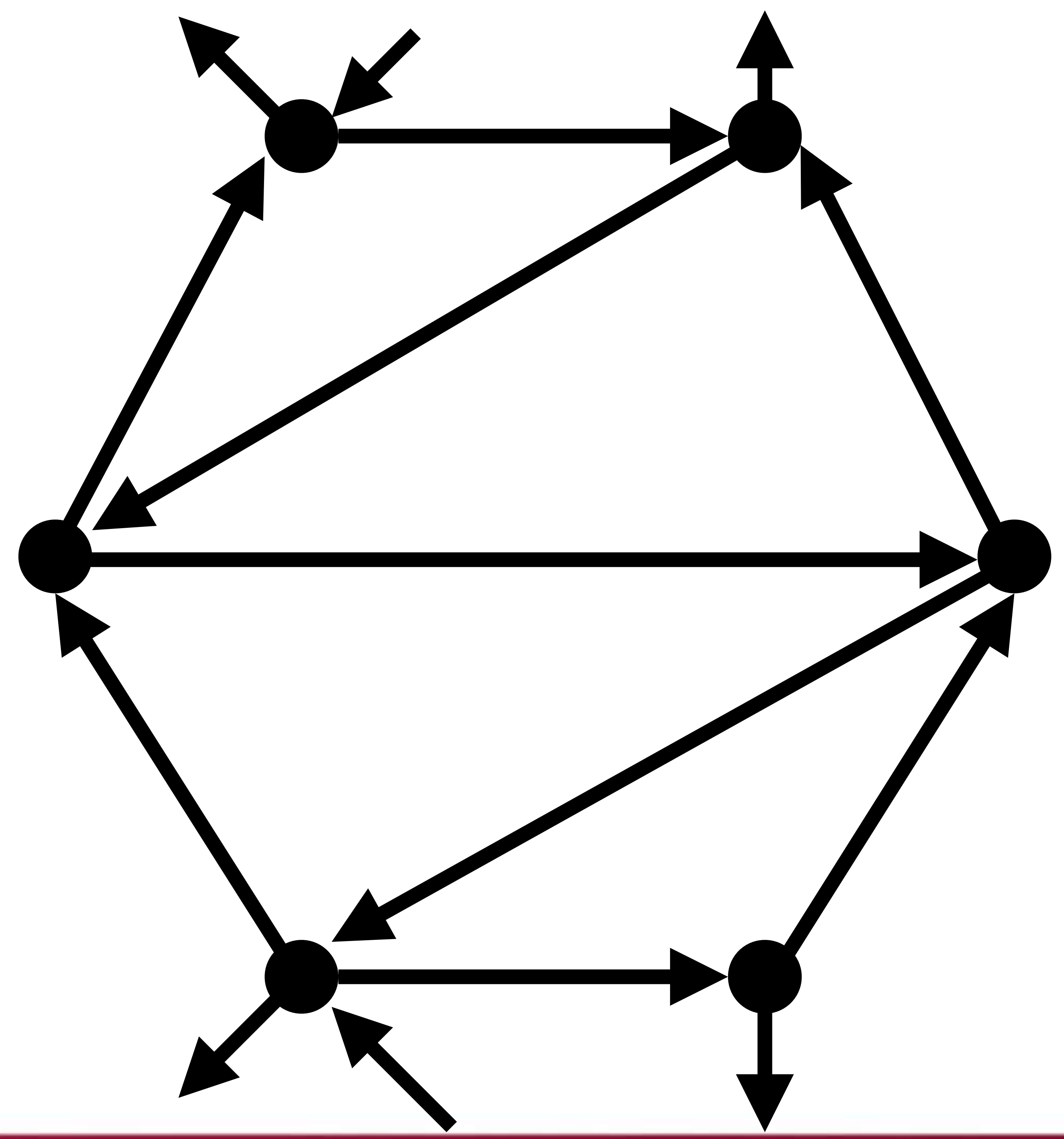
Theorem 5.

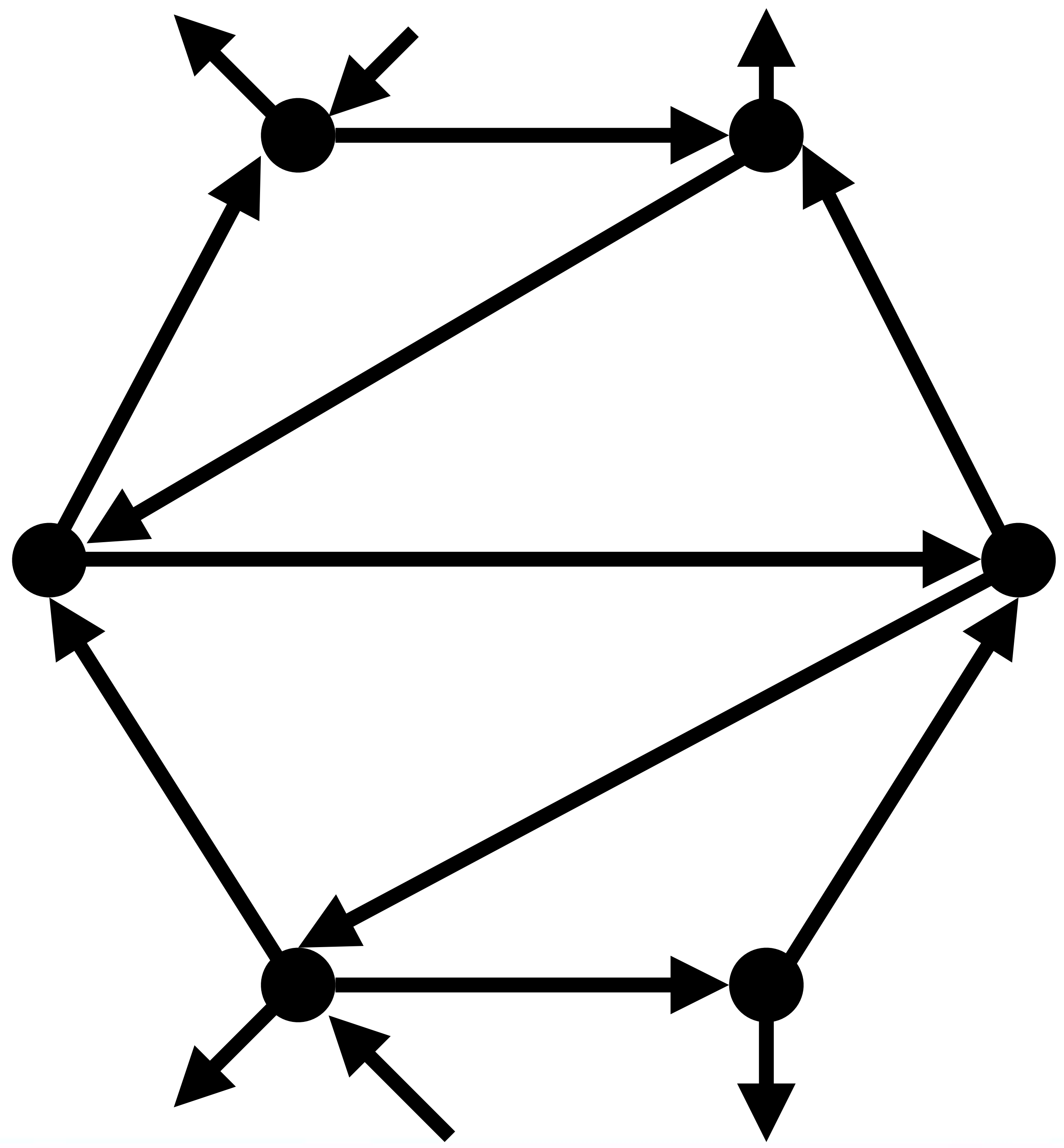
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

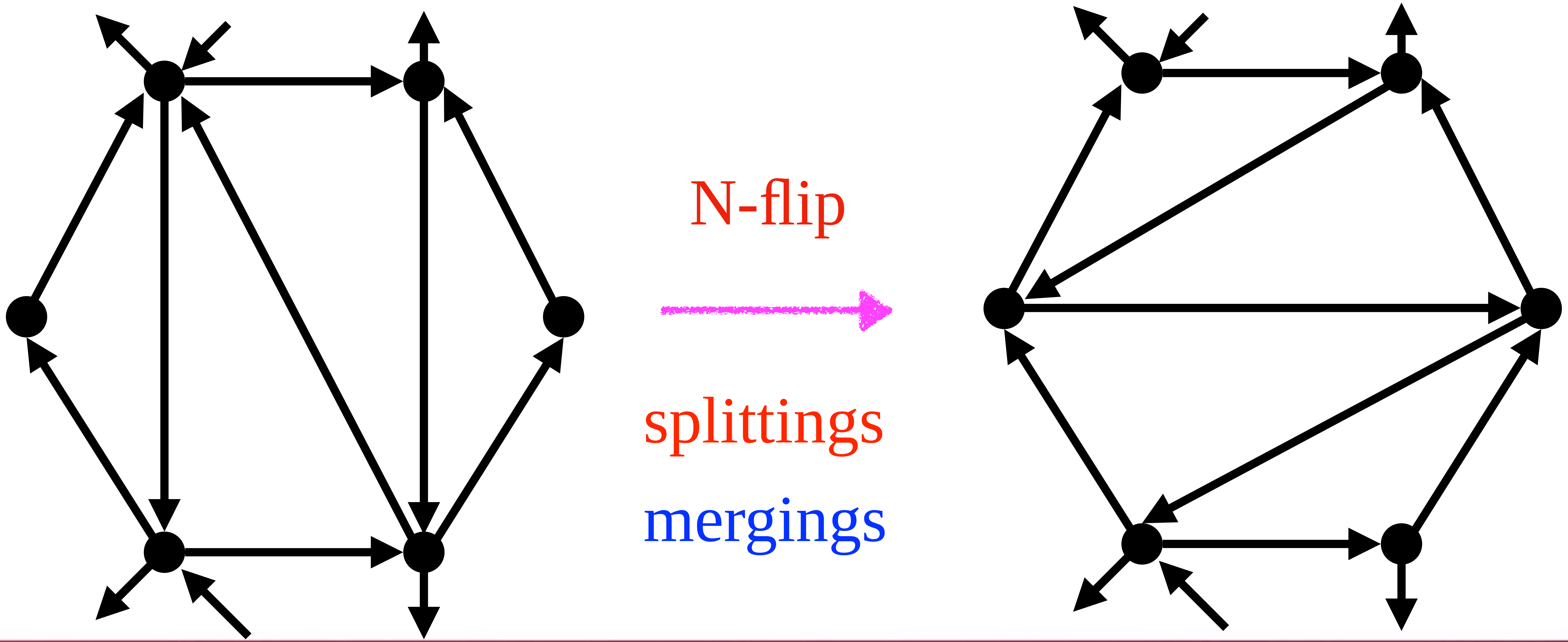
D, *D*’: regular digraphs on the sphere, and |*D*| = |*D*’|.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





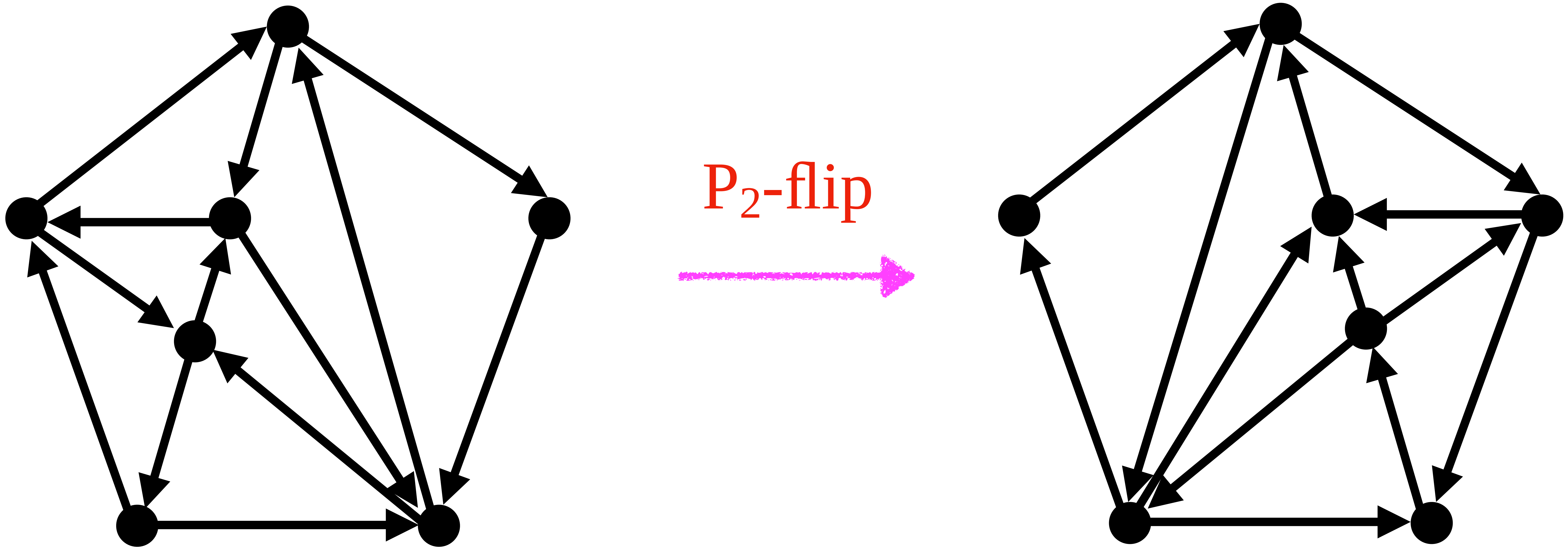
Theorem 5.

D, *D’*: regular digraphs on the sphere, and |*D*| = |*D’*|.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



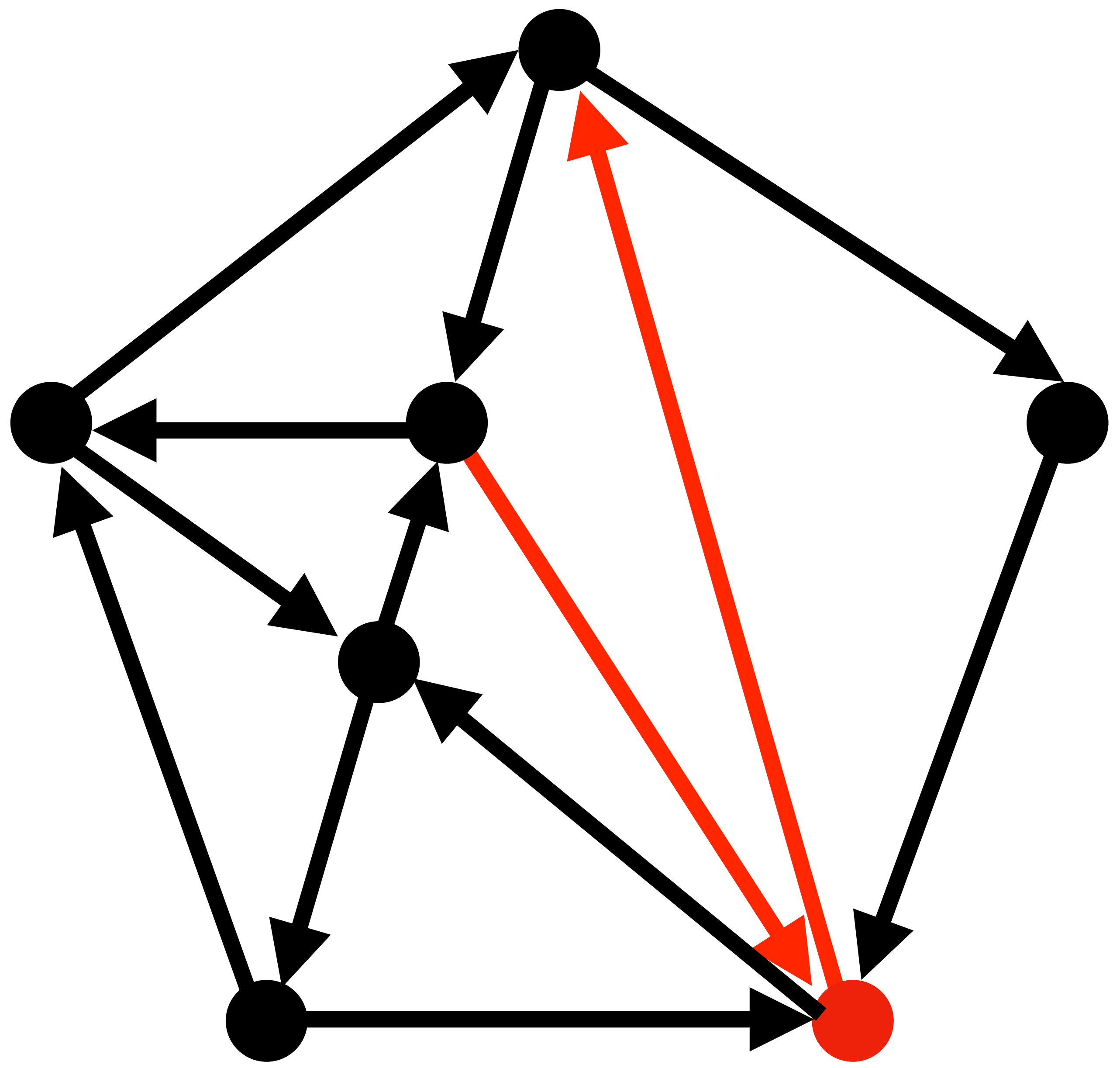
Theorem 5.

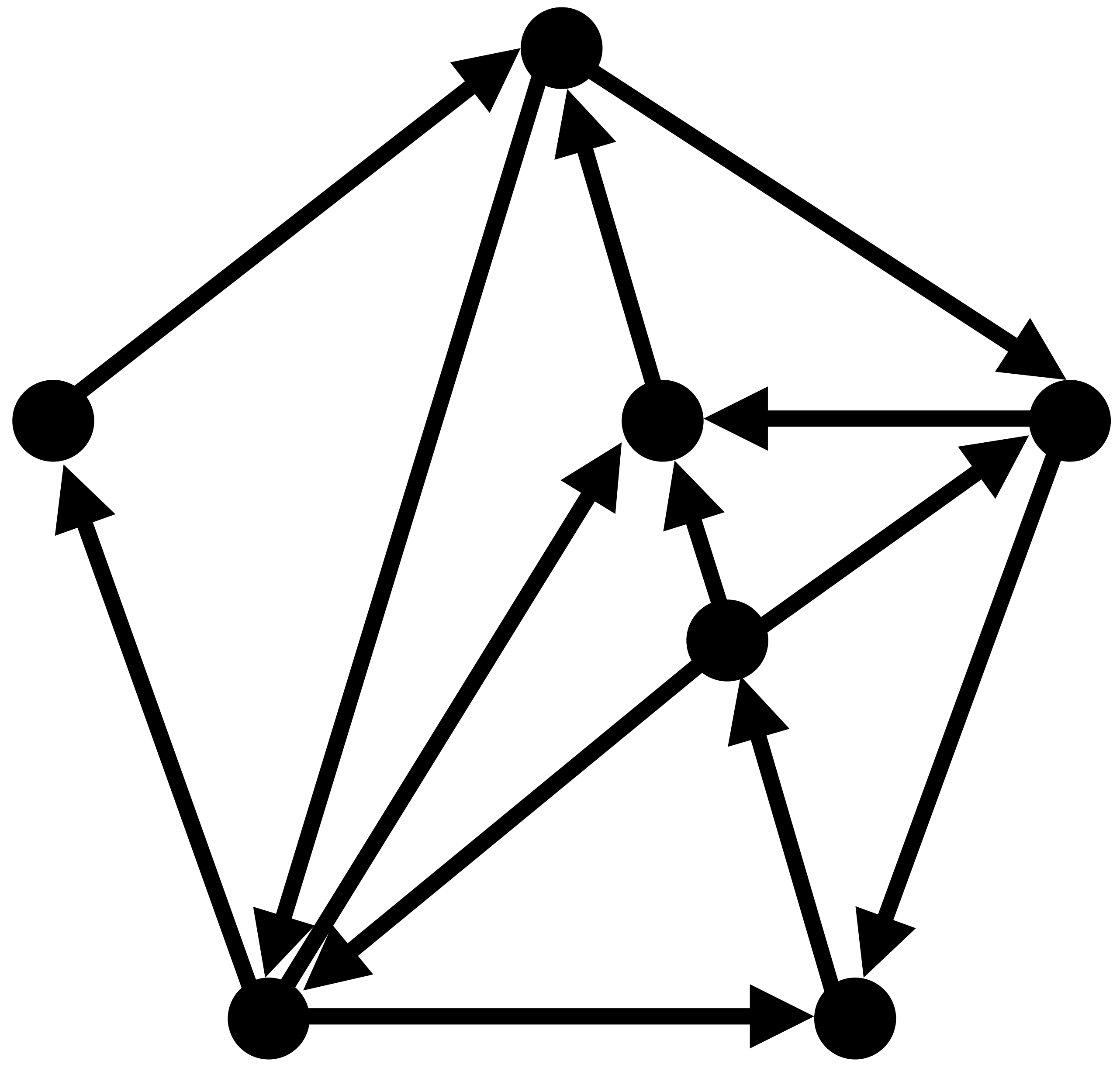
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

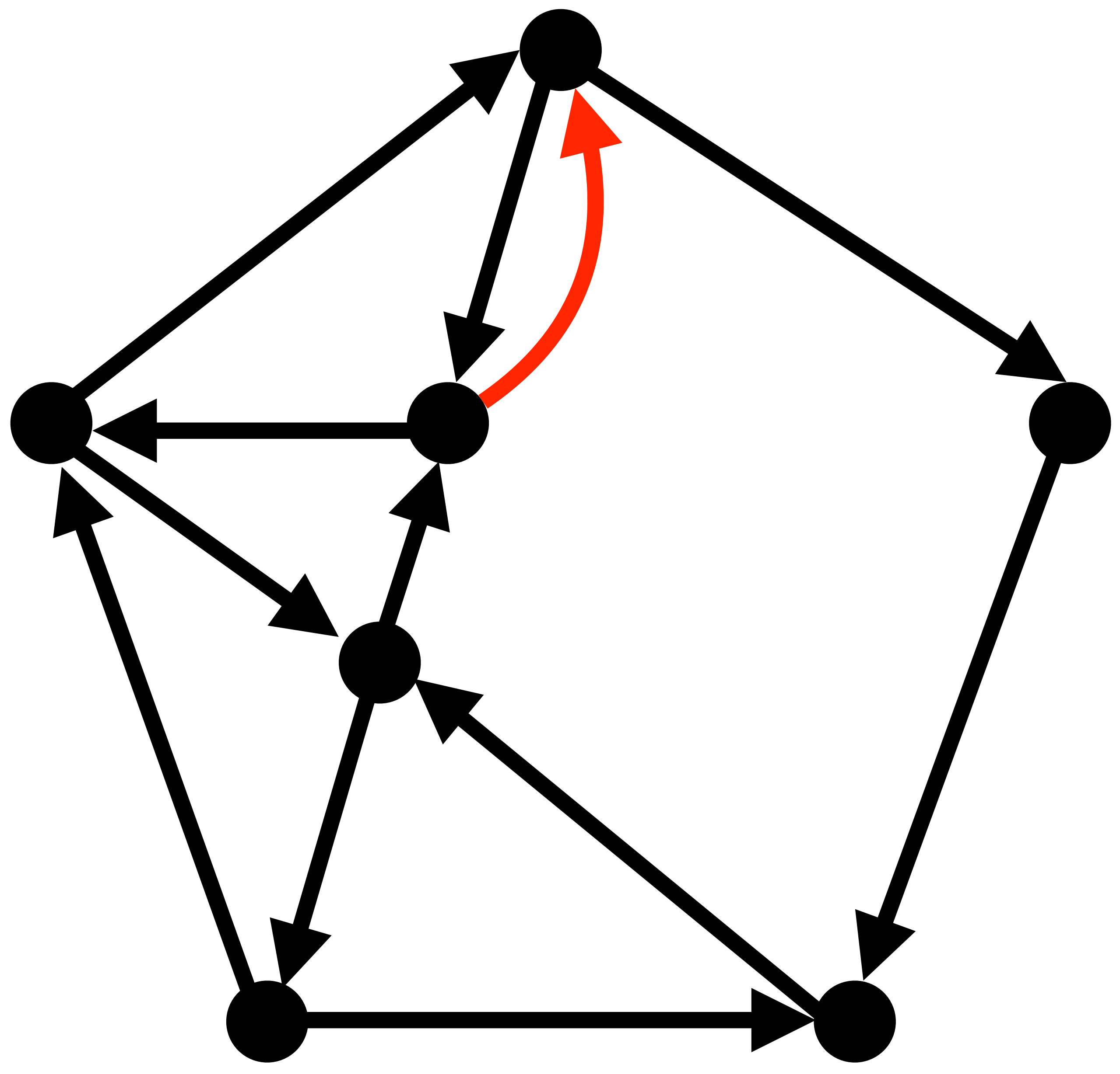
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

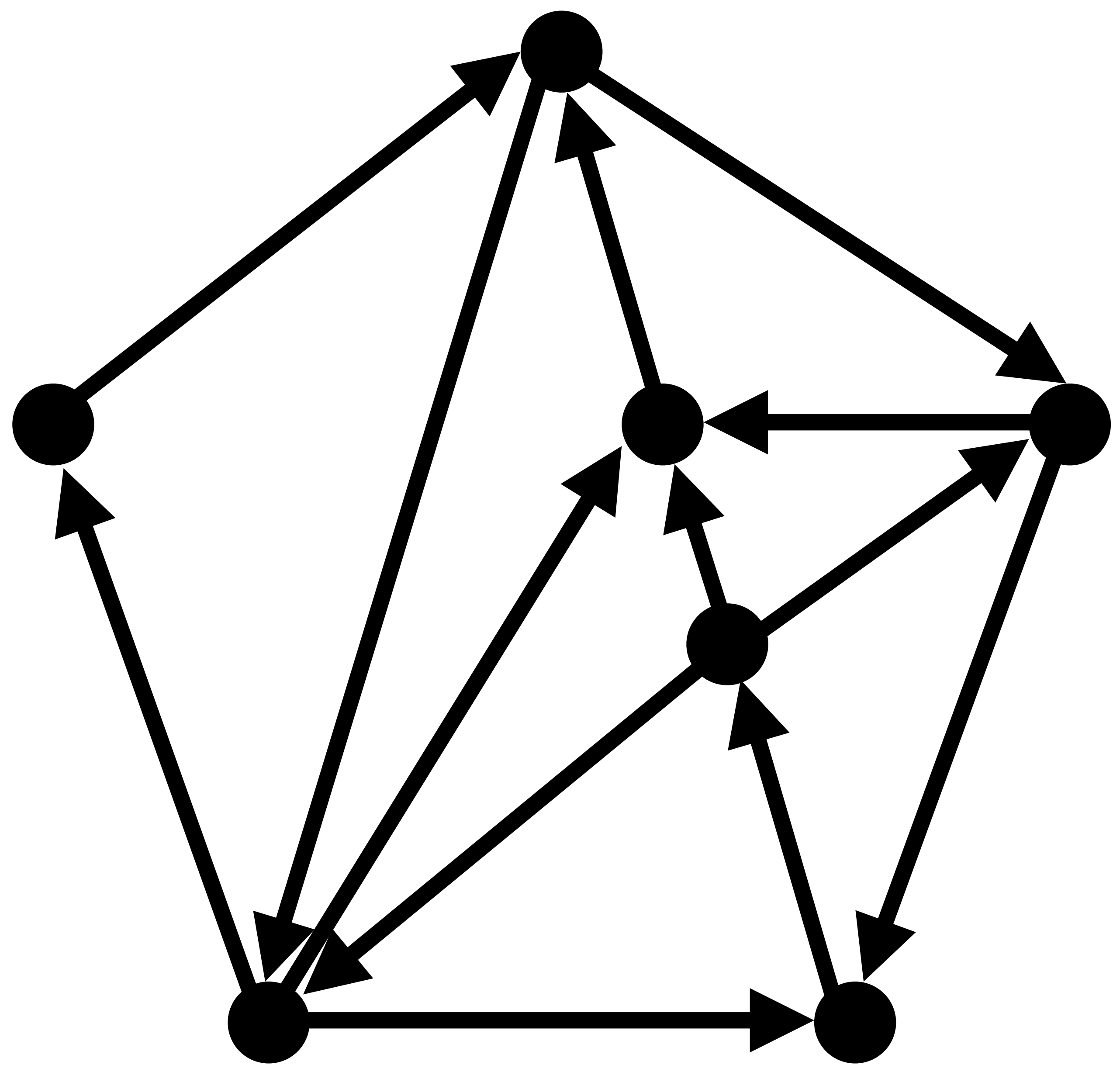




Theorem 5.

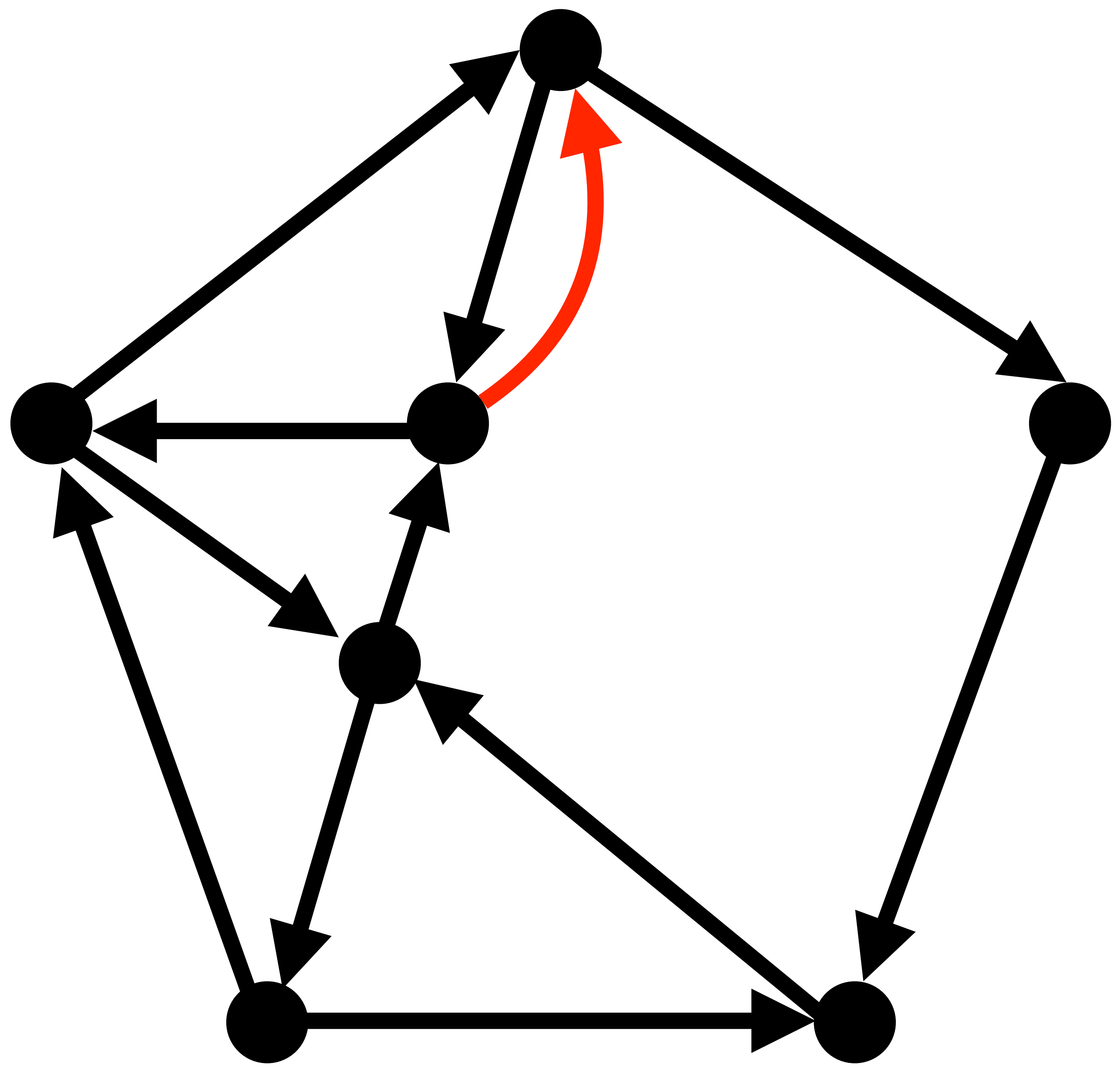
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and |*D*| = |*D'*|.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

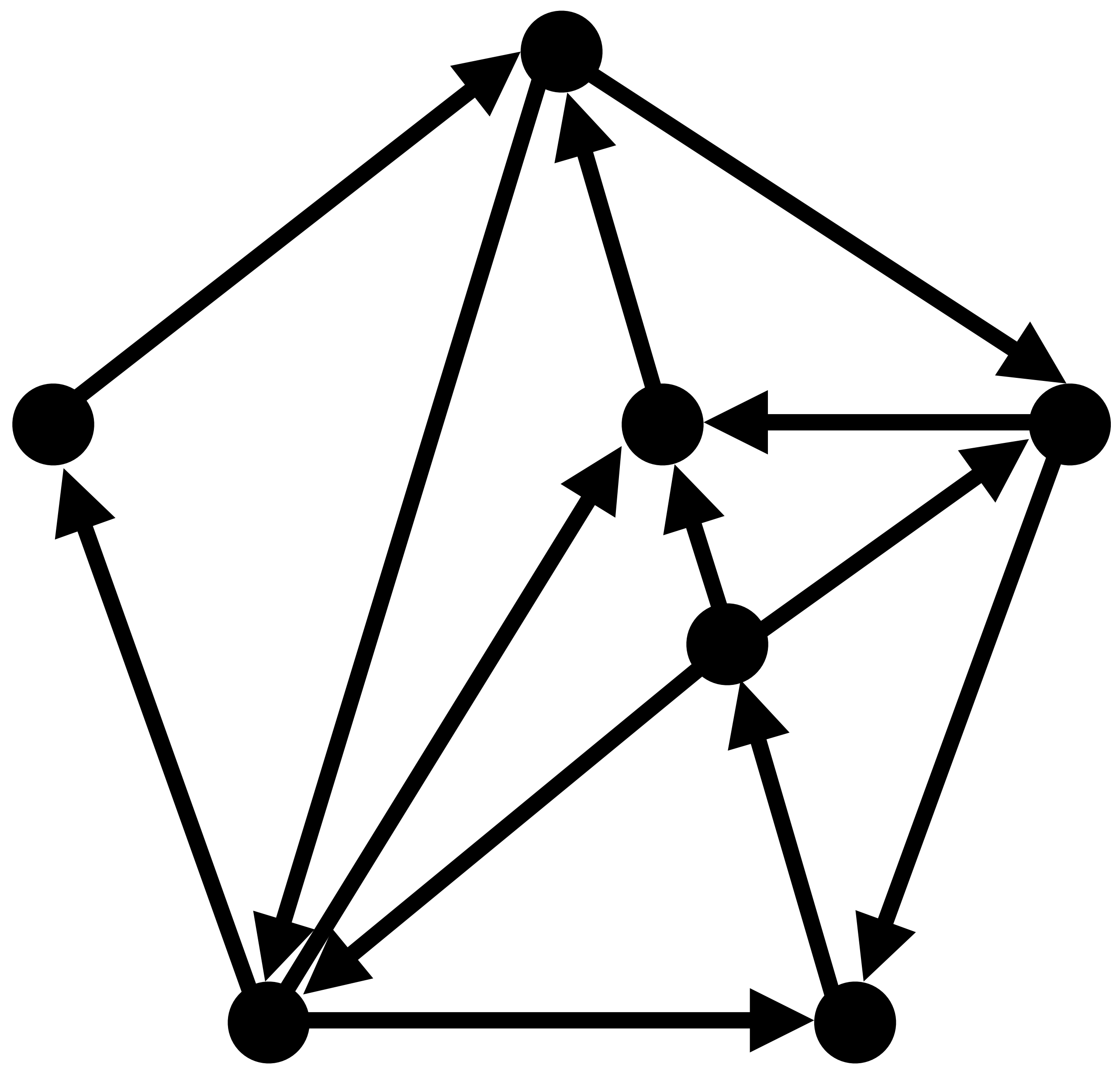




Theorem 5.

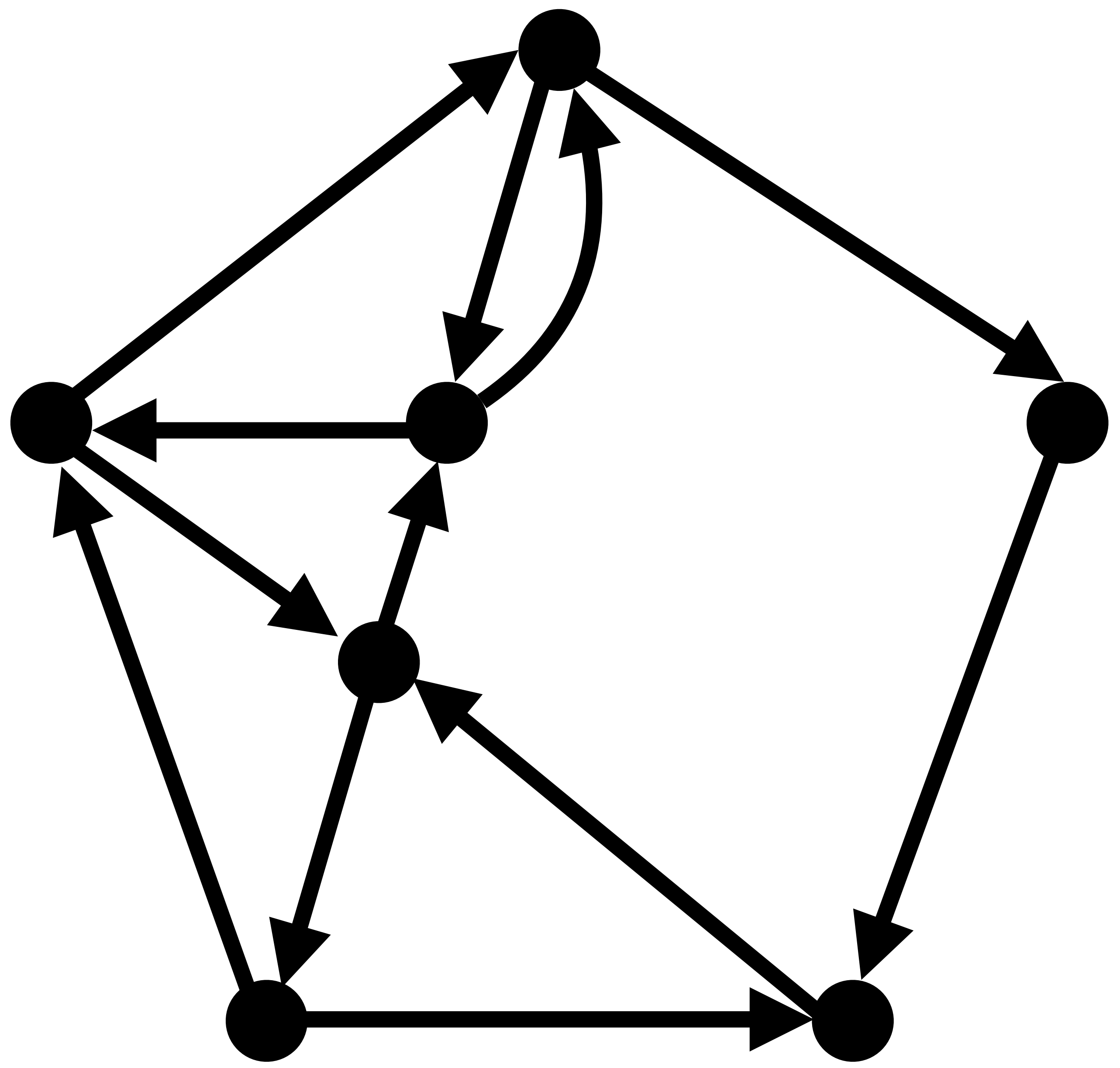
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

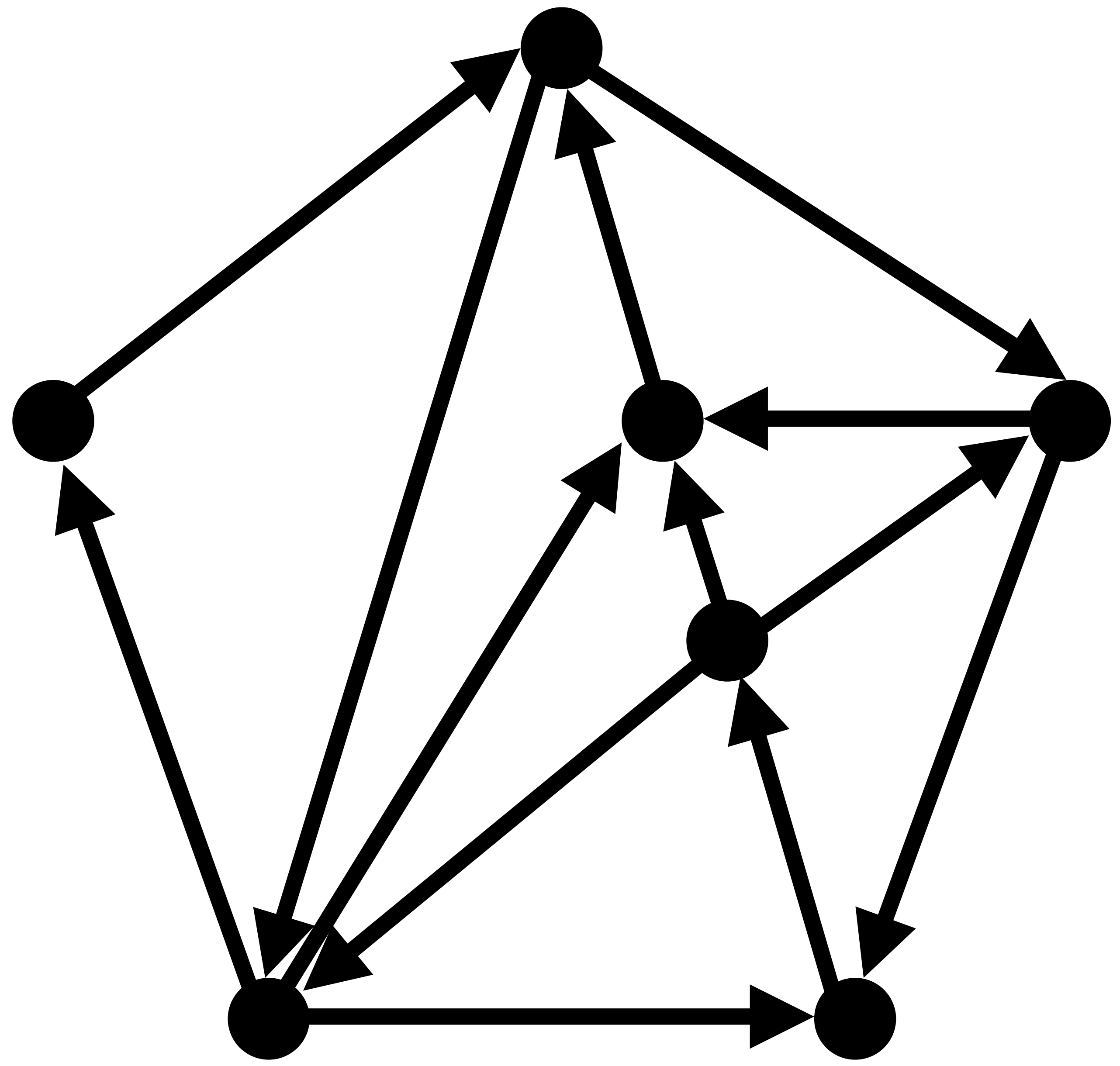




Theorem 5.

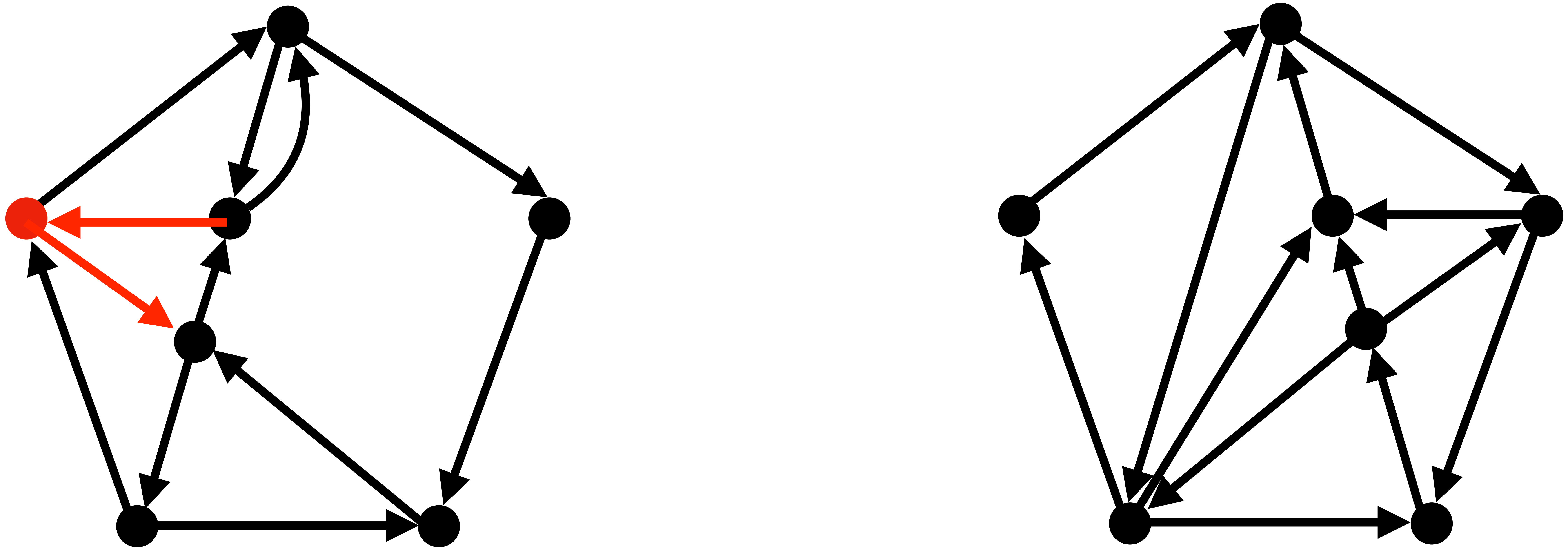
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





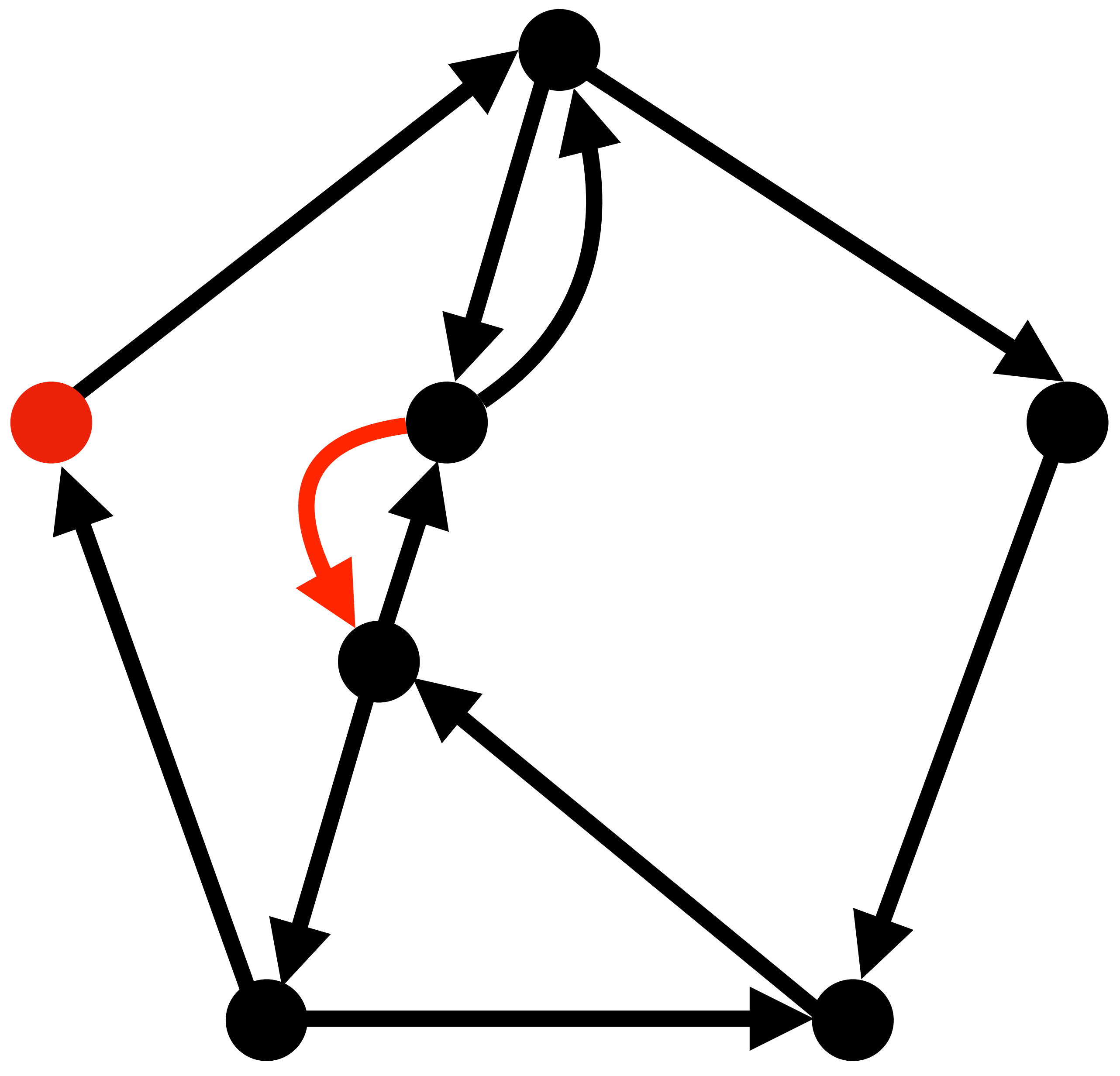
Theorem 5.

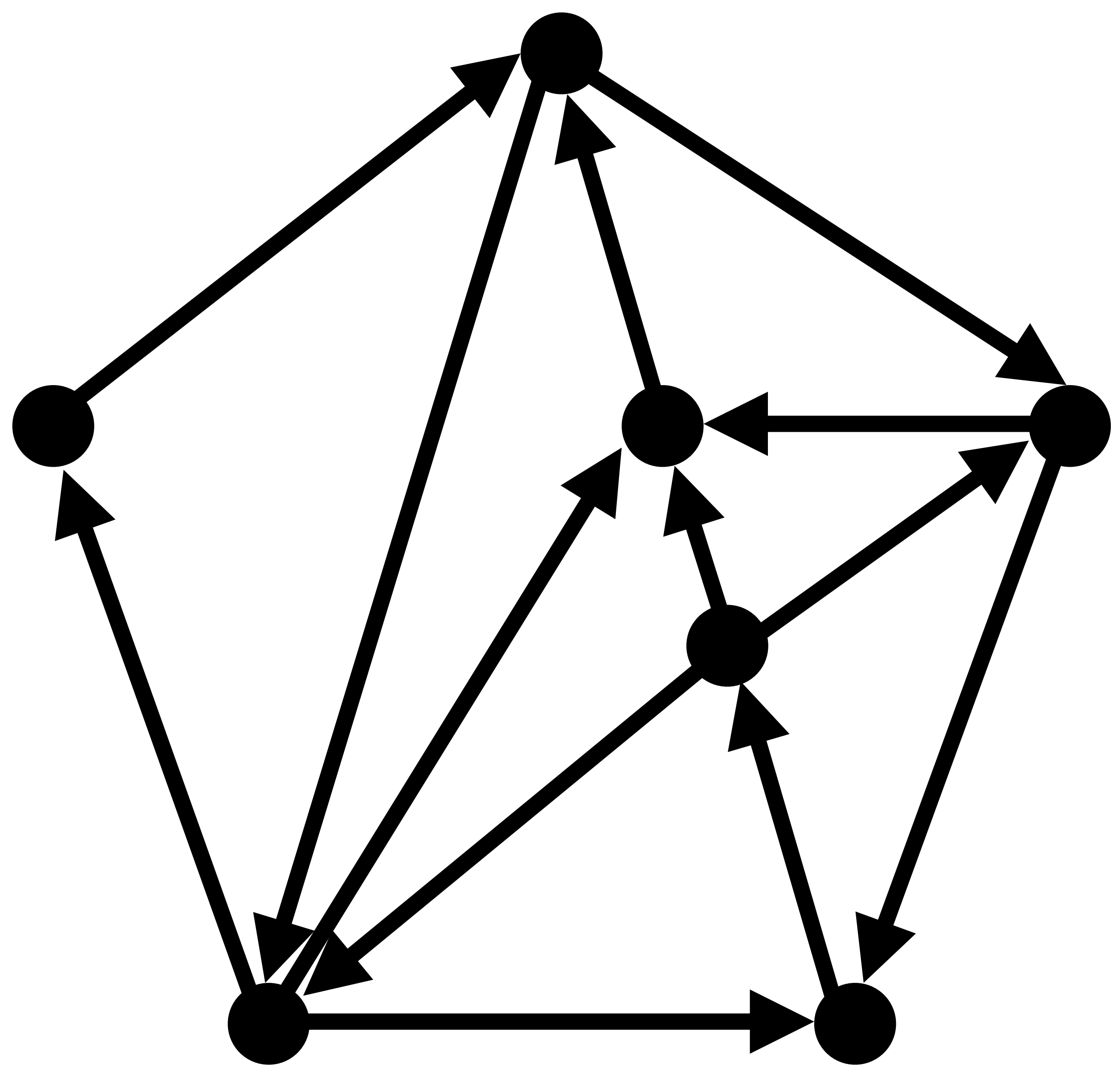
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

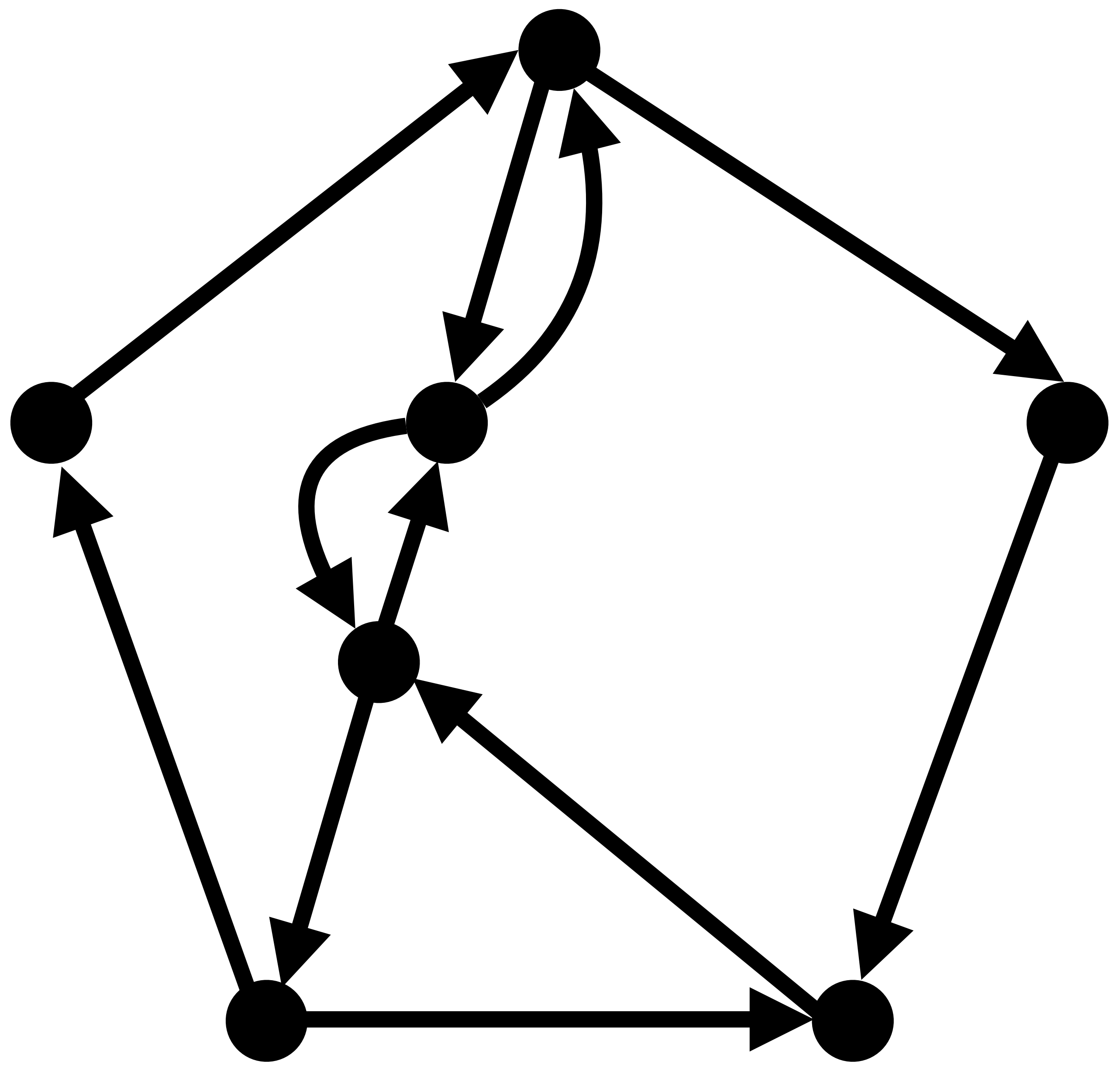
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

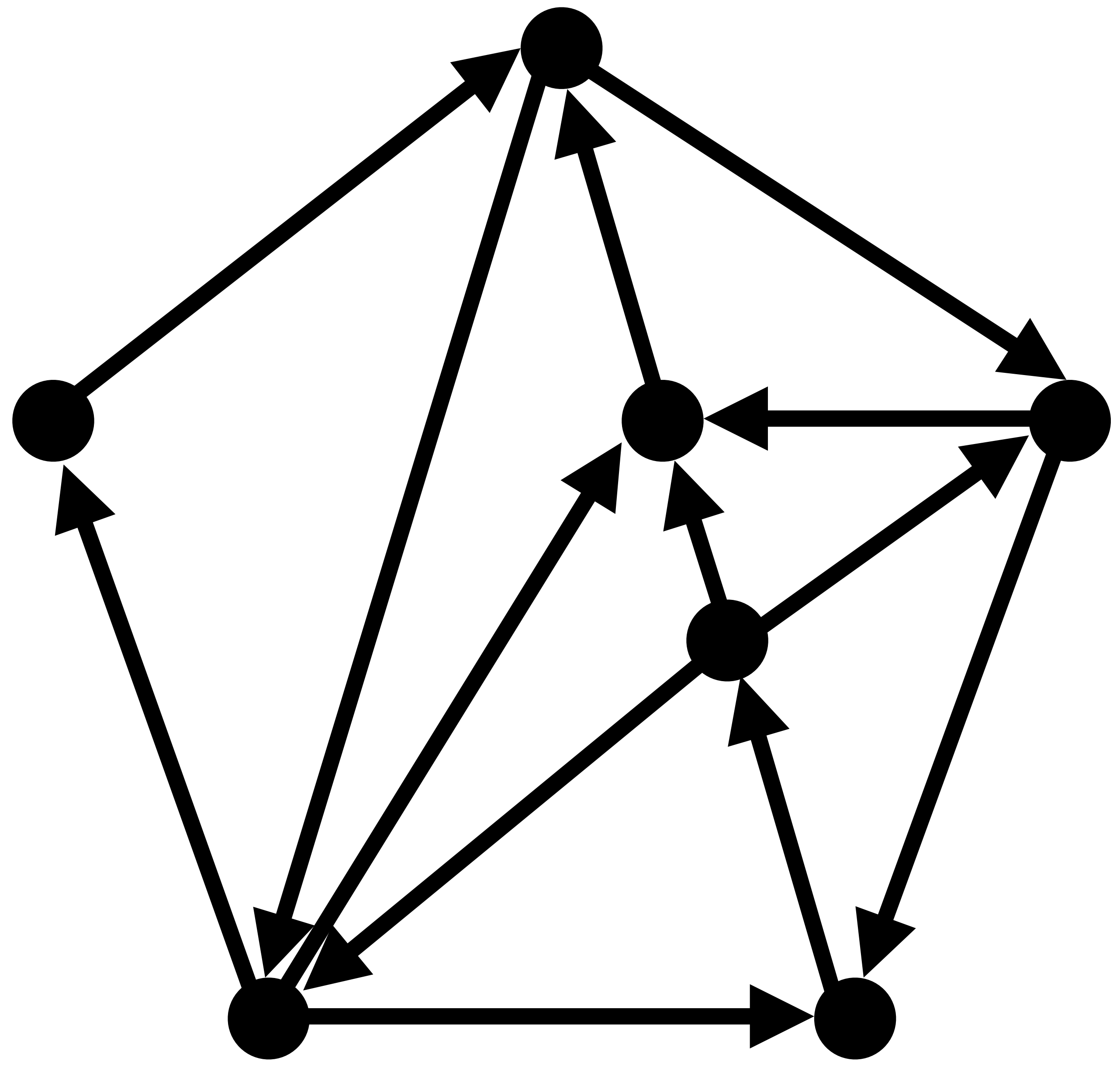




Theorem 5.

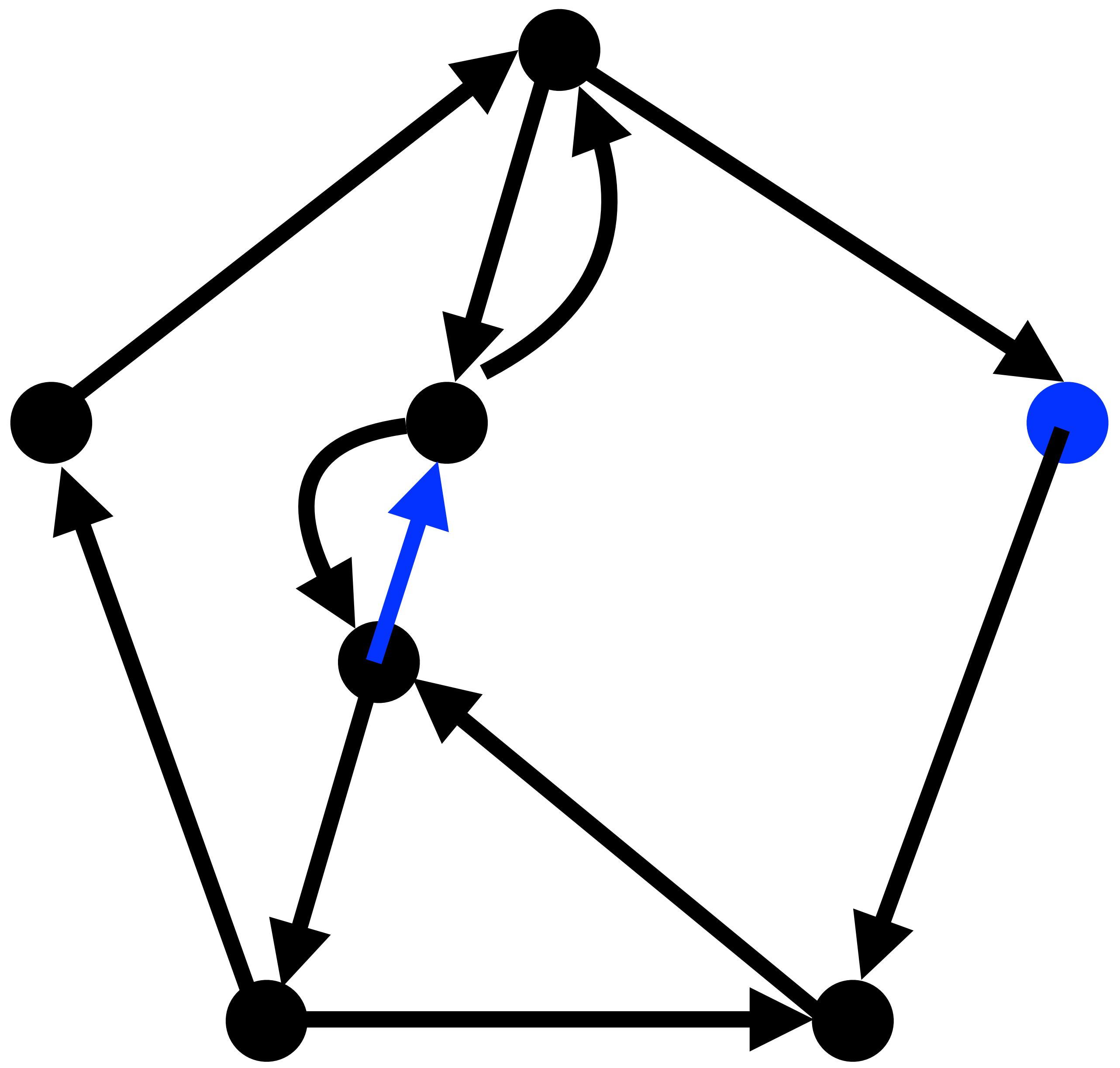
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

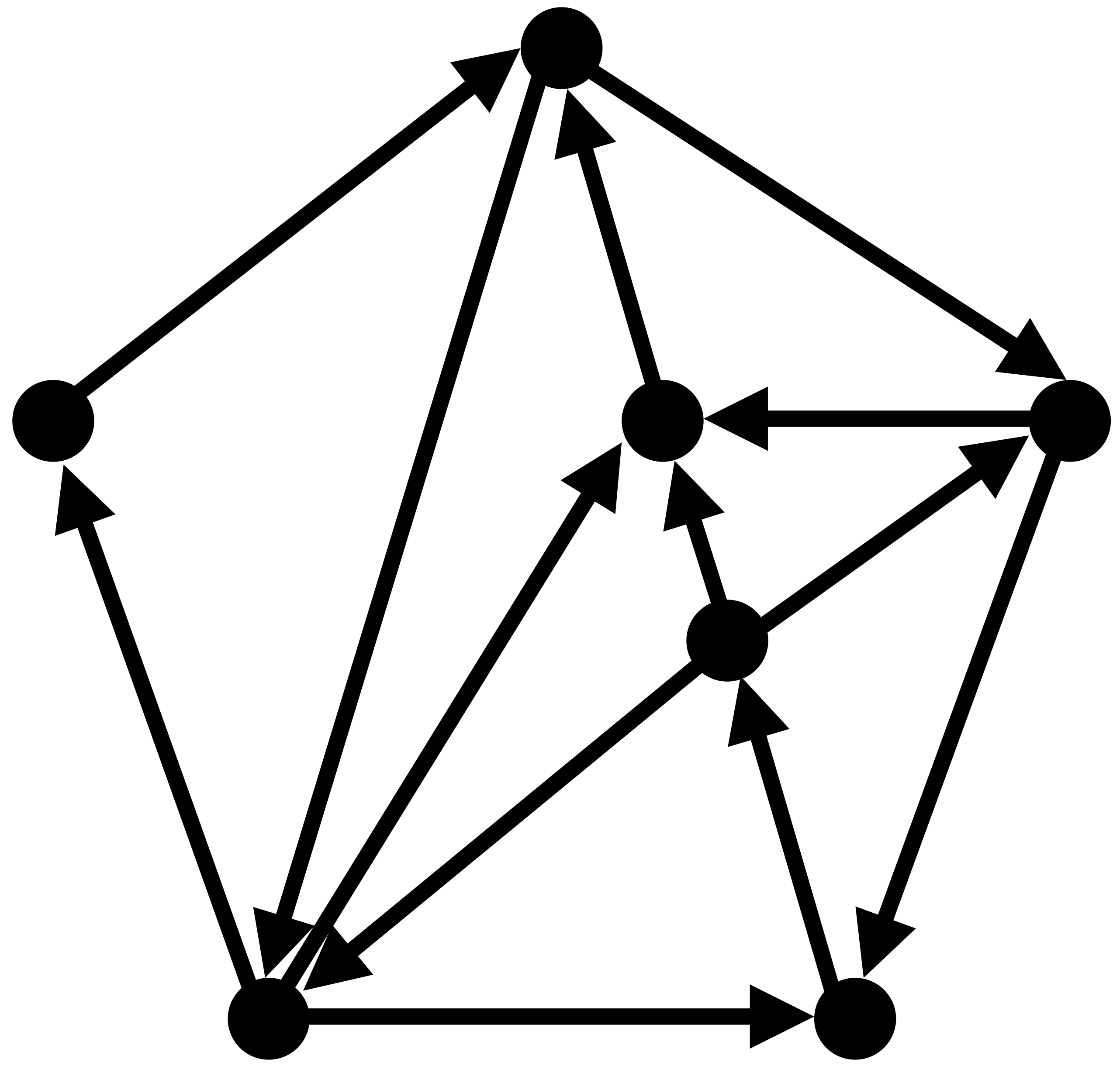




Theorem 5.

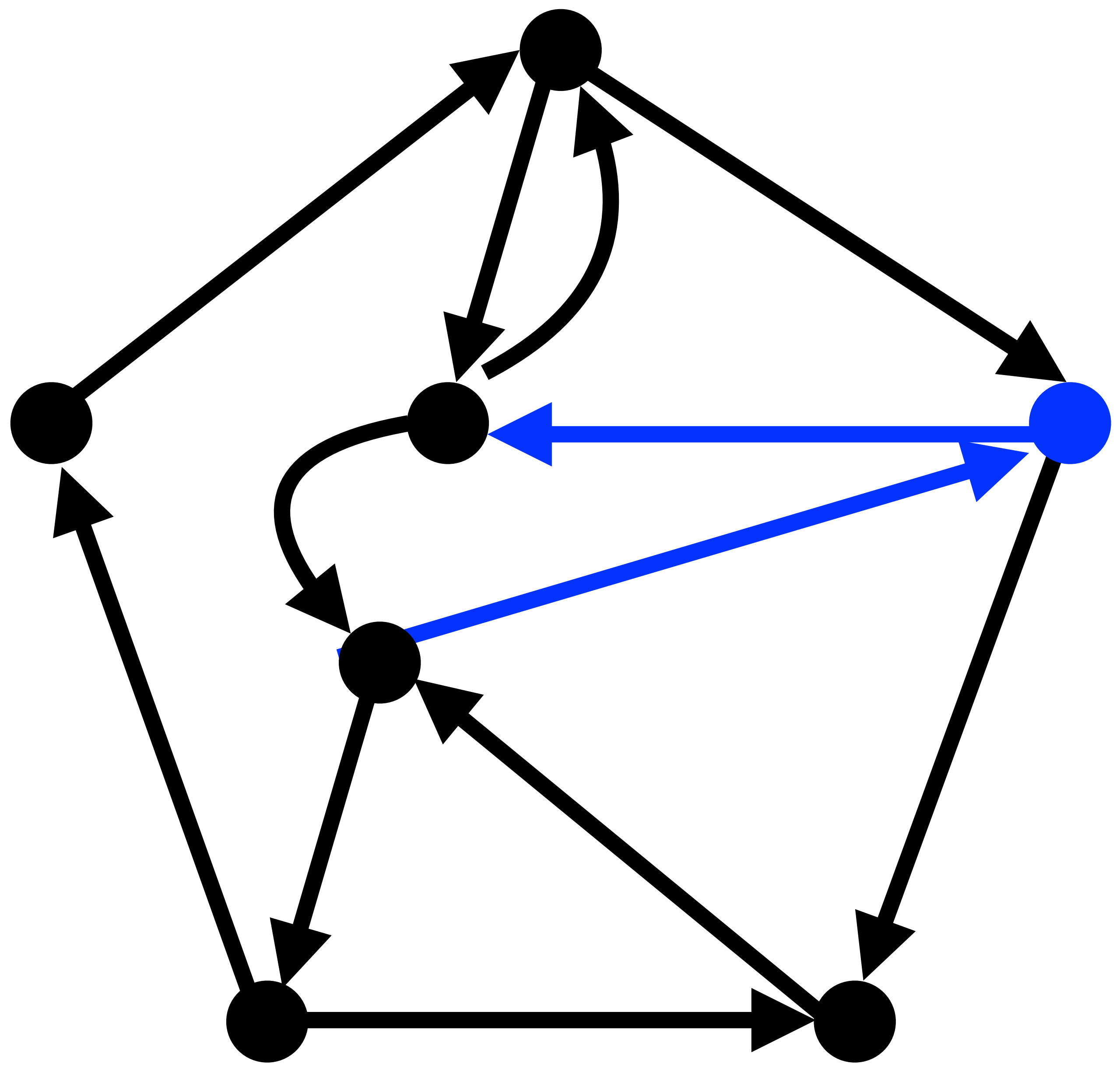
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

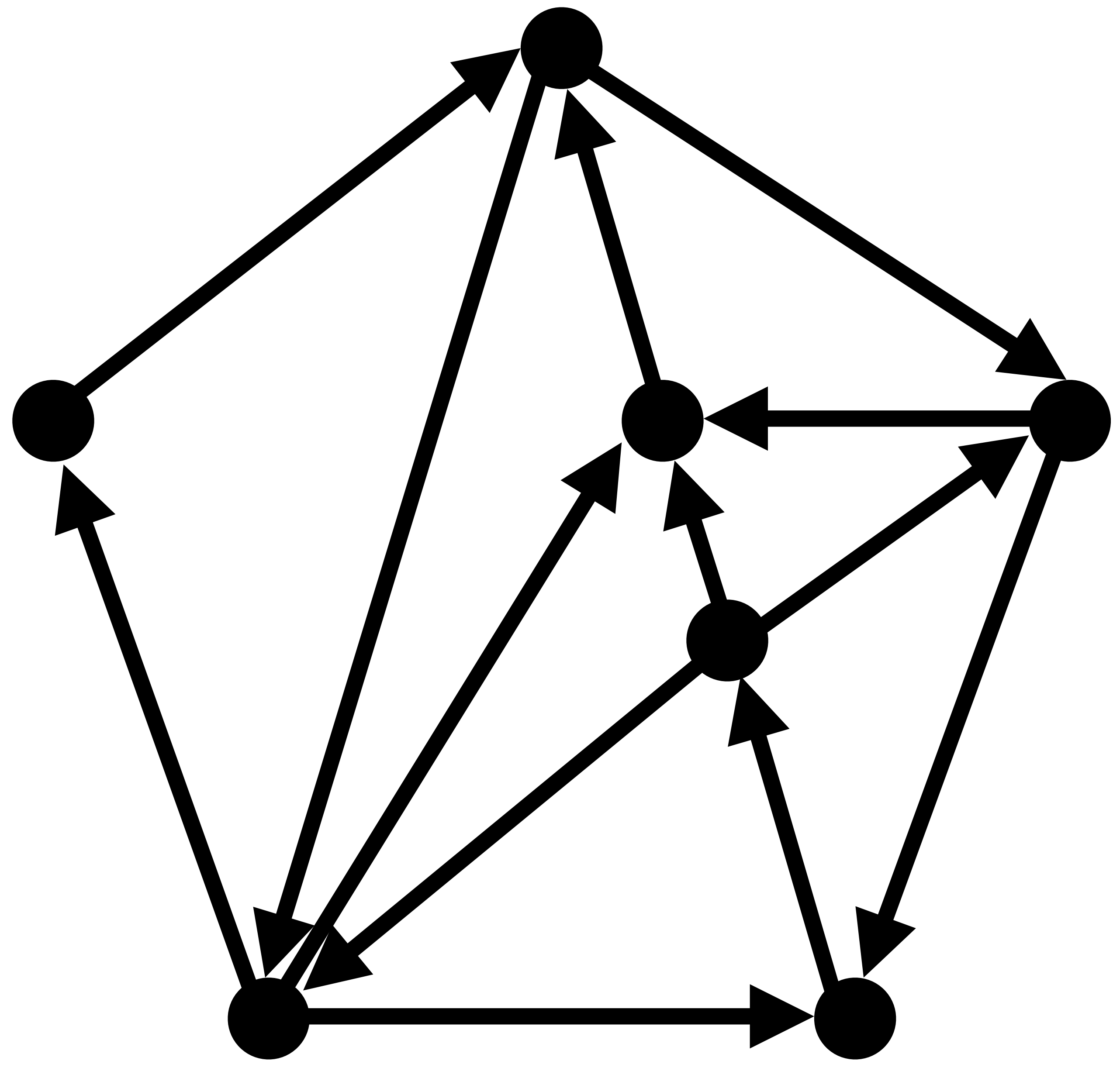




Theorem 5.

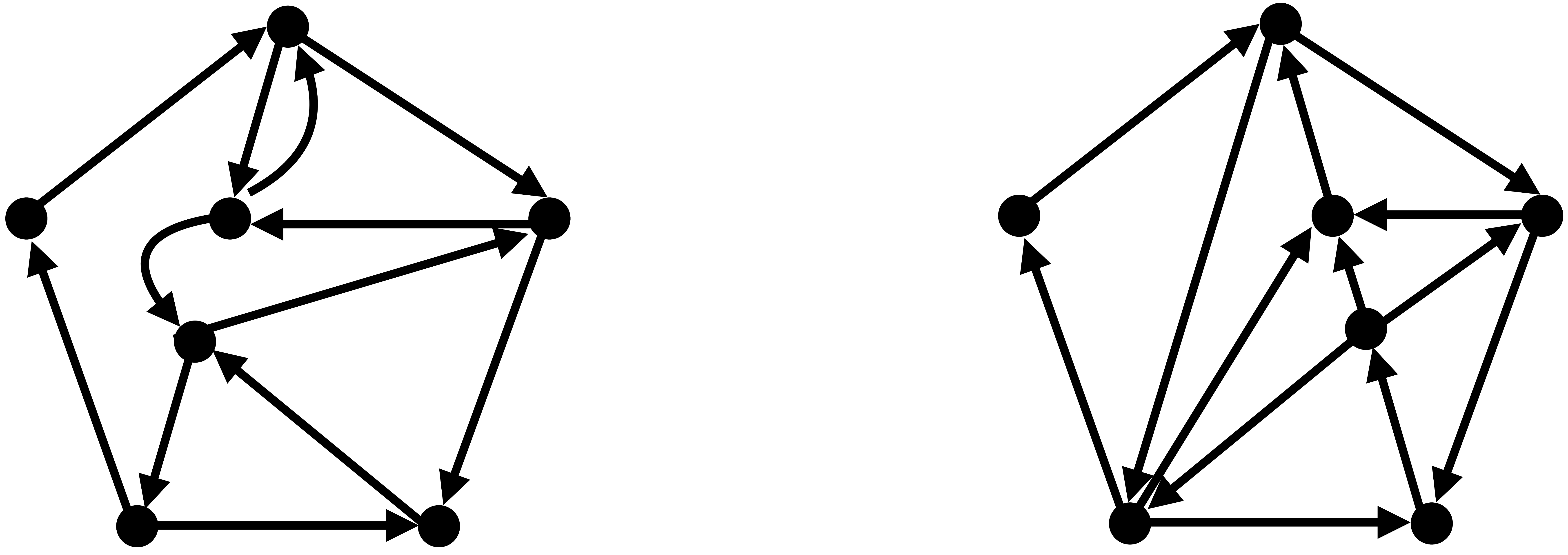
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





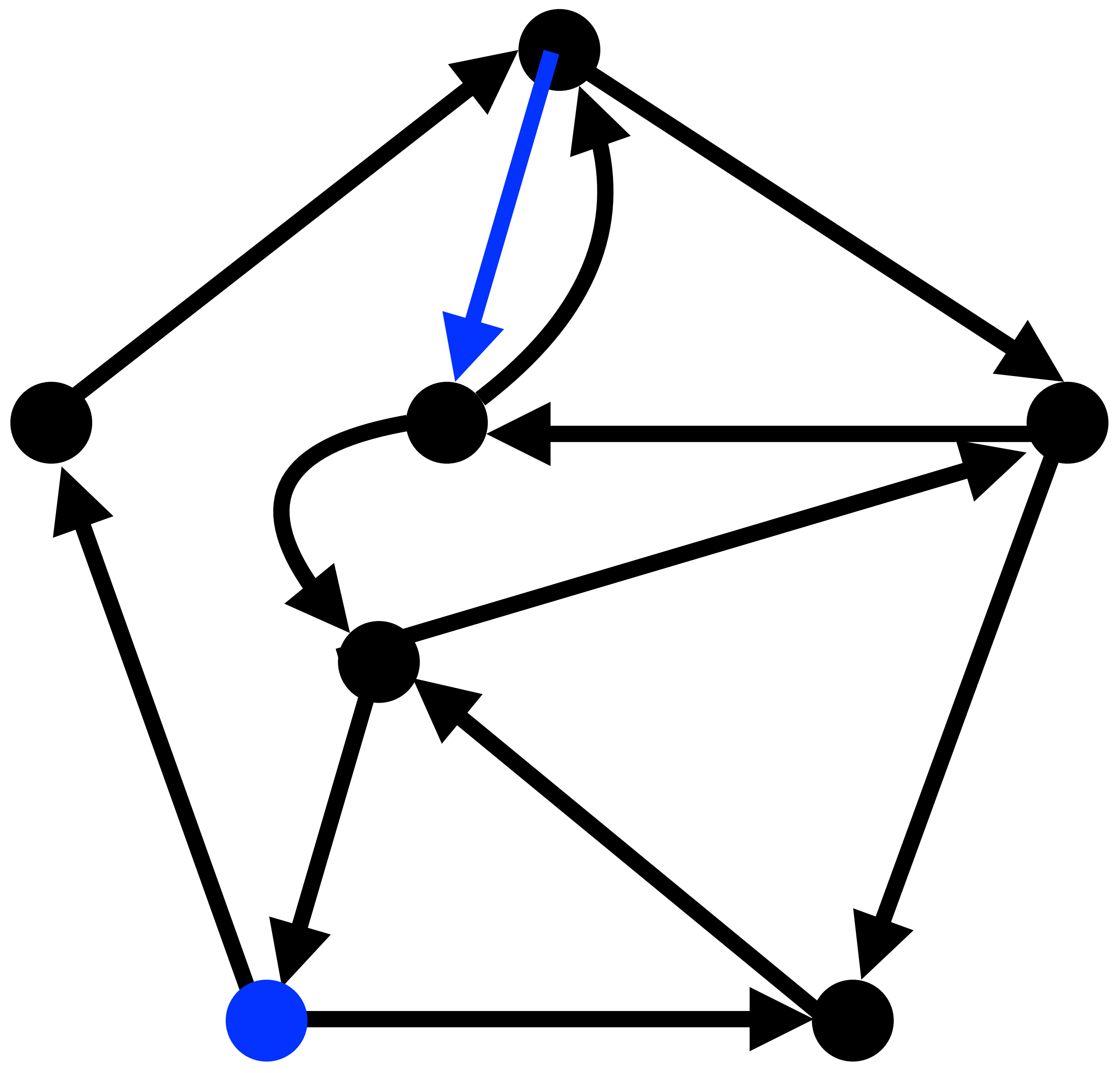
Theorem 5.

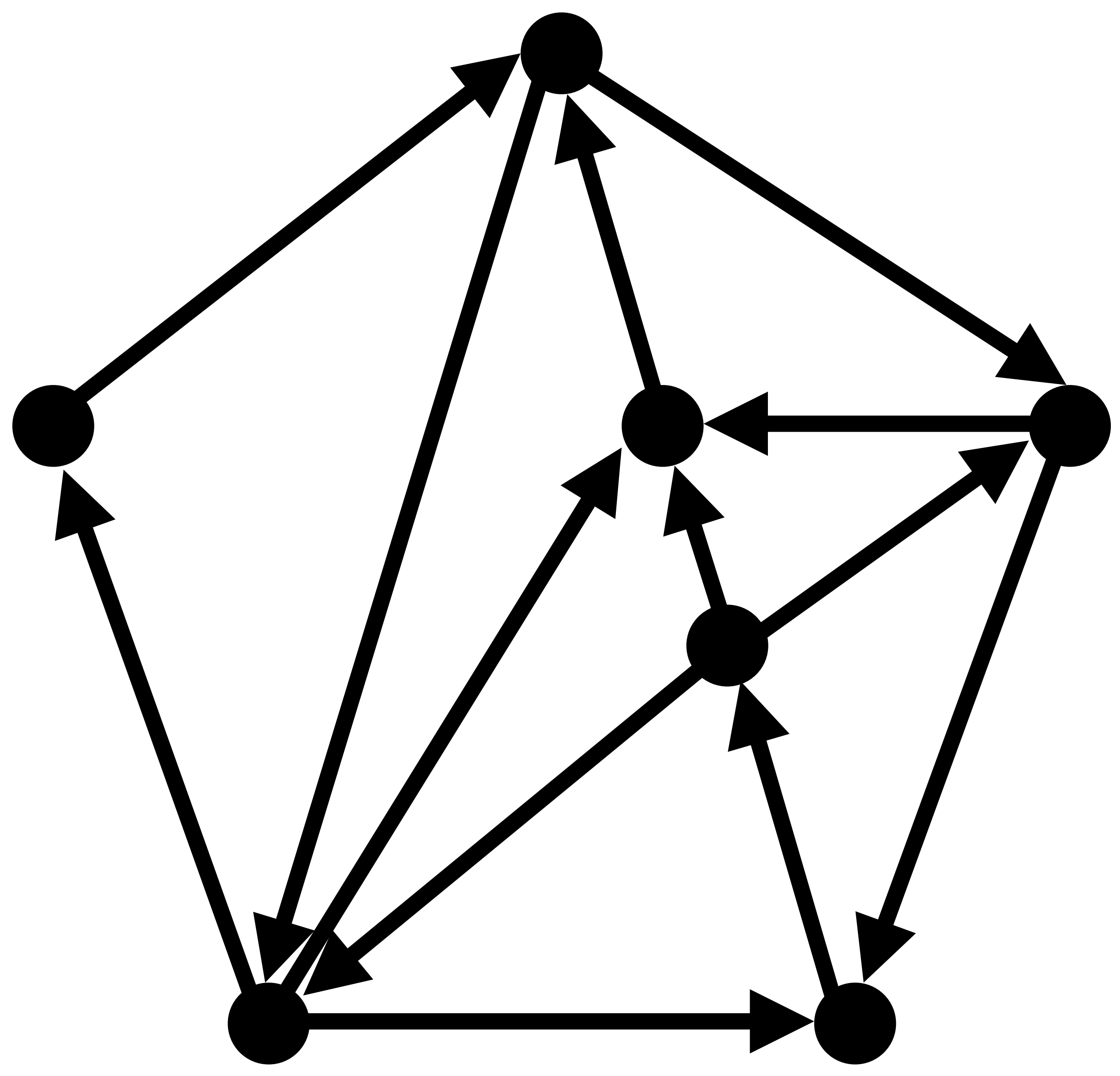
D, D': regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.



Theorem 5.

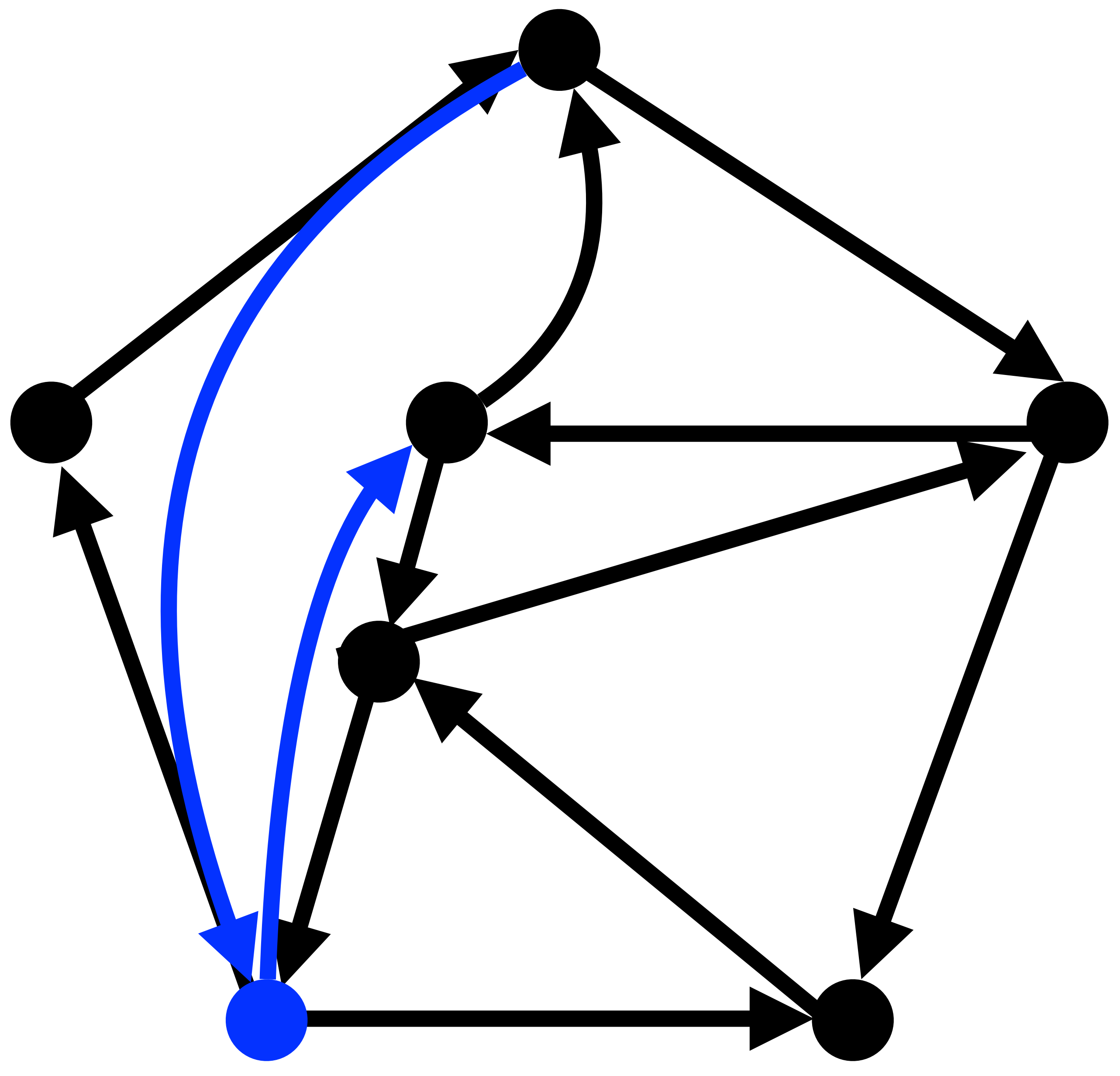
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

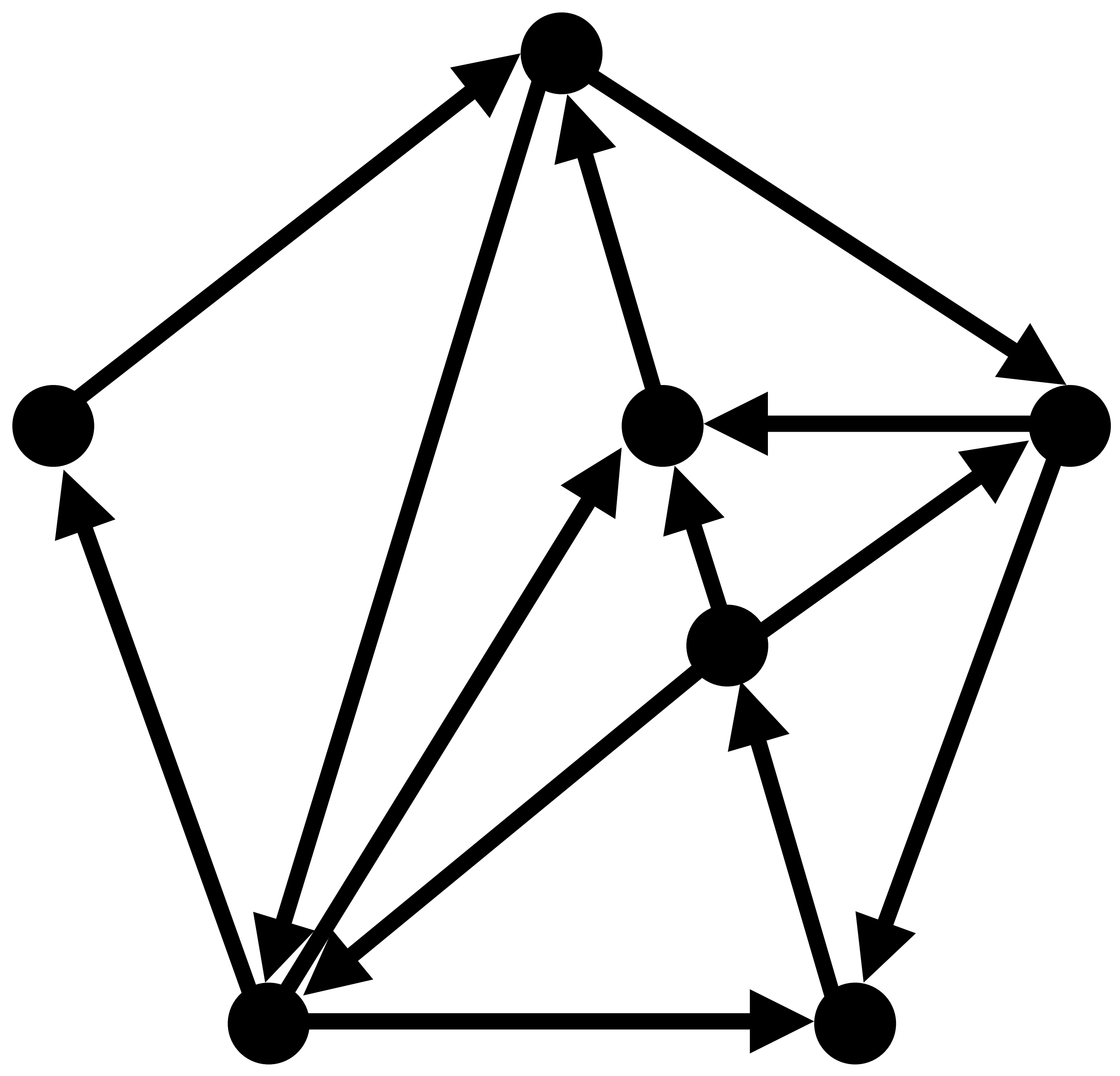




Theorem 5.

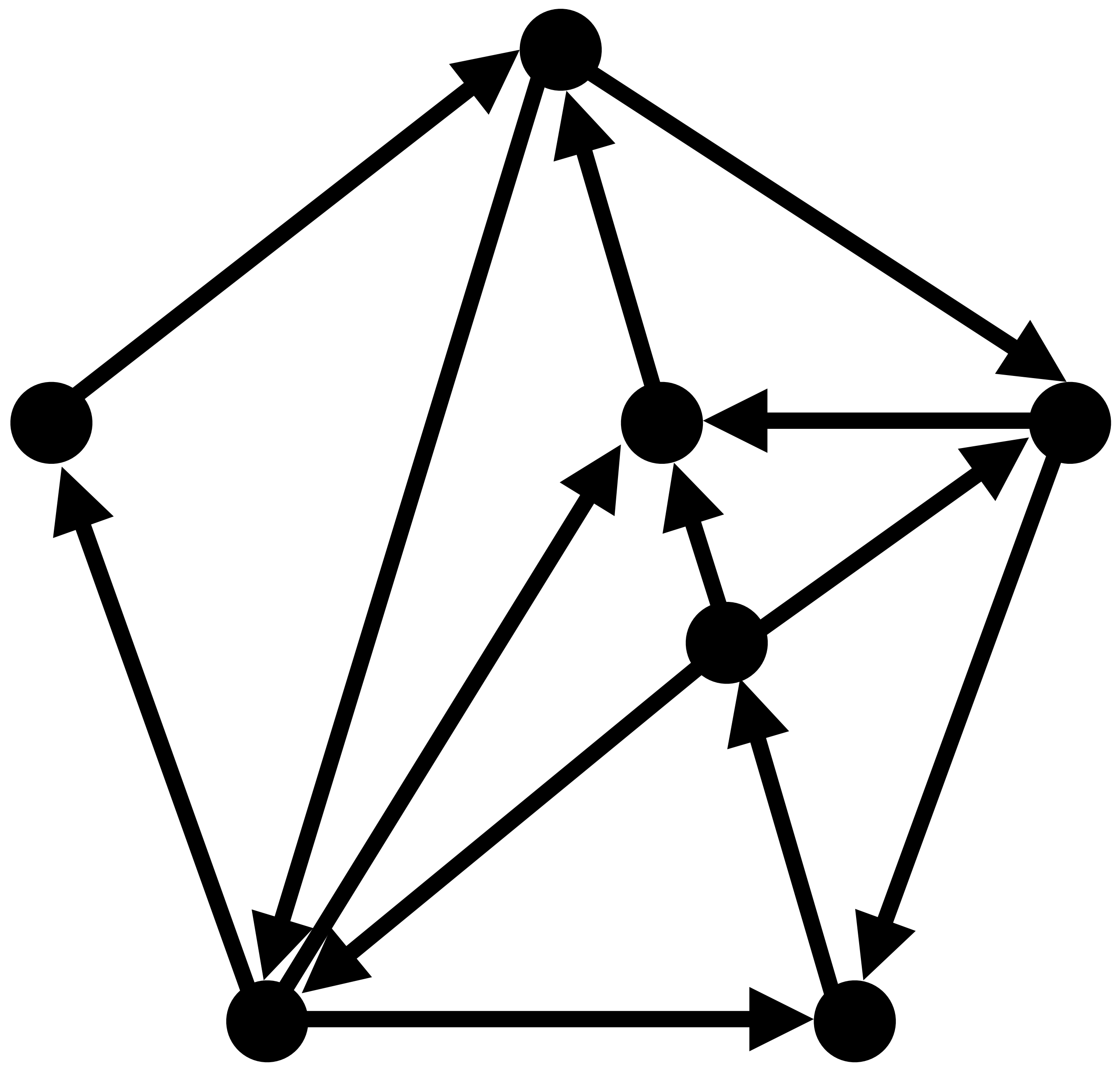
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

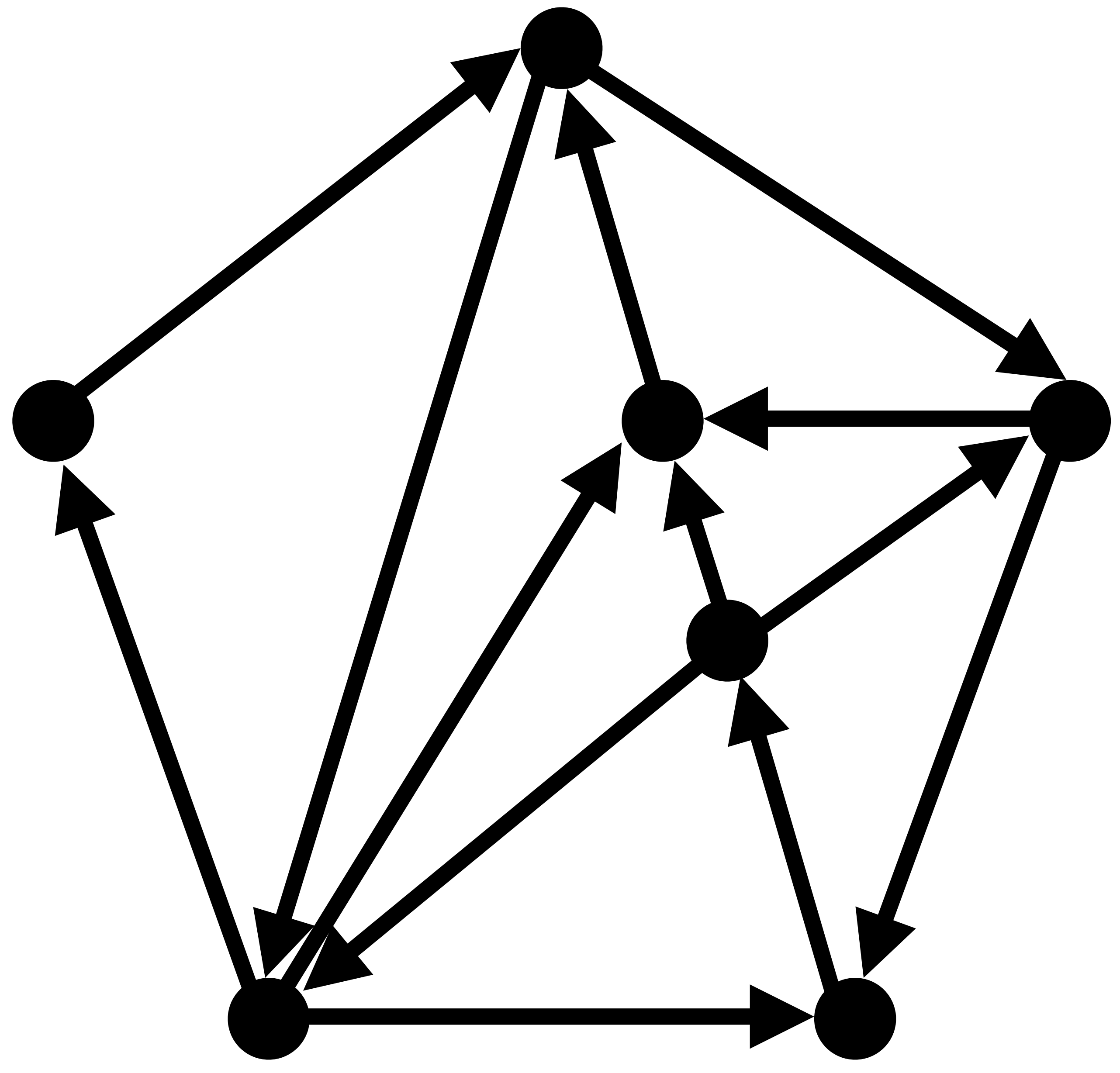




Theorem 5.

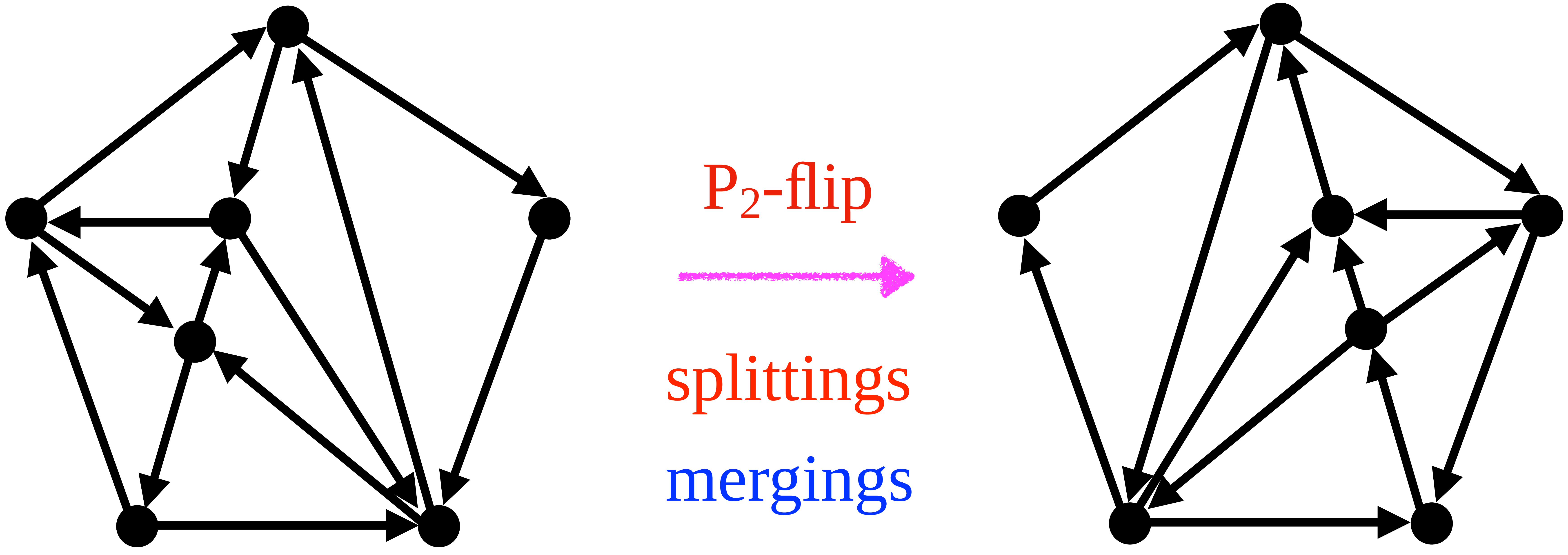
D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.





Theorem 5.

D, *D'*: regular digraphs on the sphere, and $|D| = |D'|$.
If their underlying graphs are simple even triangulations,
then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

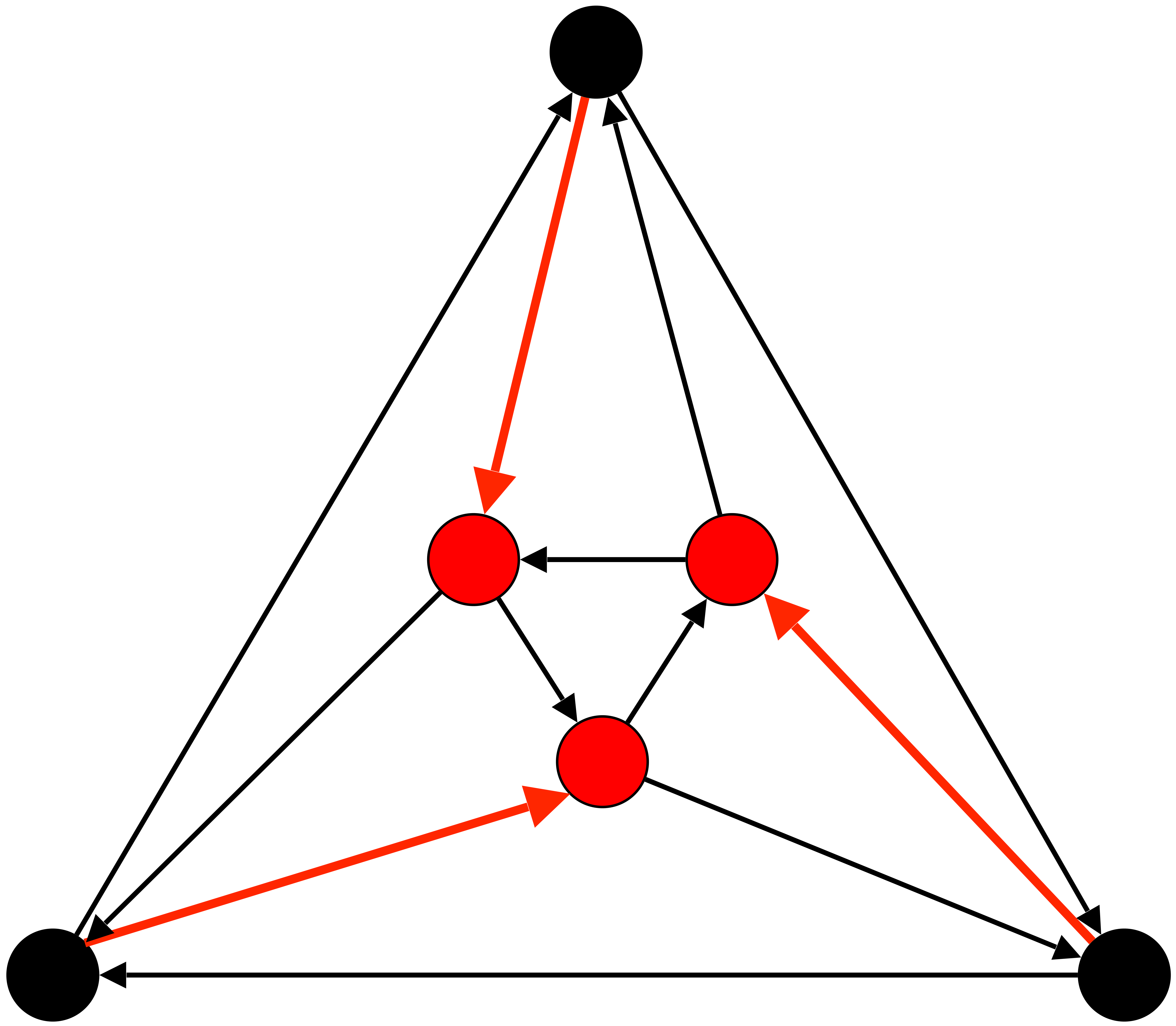


Theorem 6.

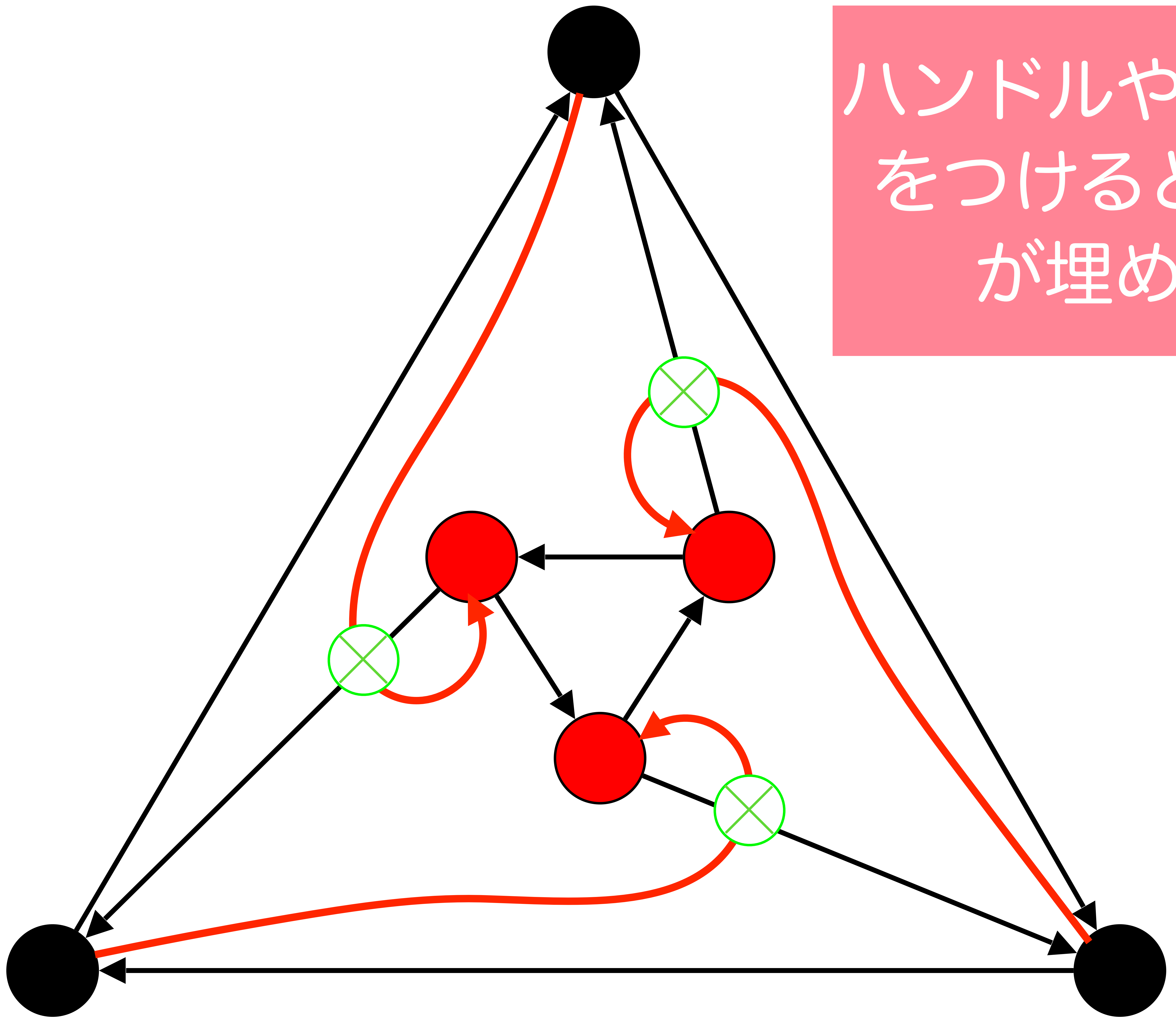
D, D': regular digraphs on a closed surface **F**.

Then there exists a positive integer $N(\mathbf{F})$ such that if $|D| = |D'| \geqq N(\mathbf{F})$ and their underlying graphs are simple even triangulations, then they can be transformed into each other by a sequence of splittings and mergings preserving the number of vertices.

平面には埋め込みできていないが…



平面には埋め込みできていないが…



ハンドルやクロスキャップをつけると種数は上がるが埋め込みは可能

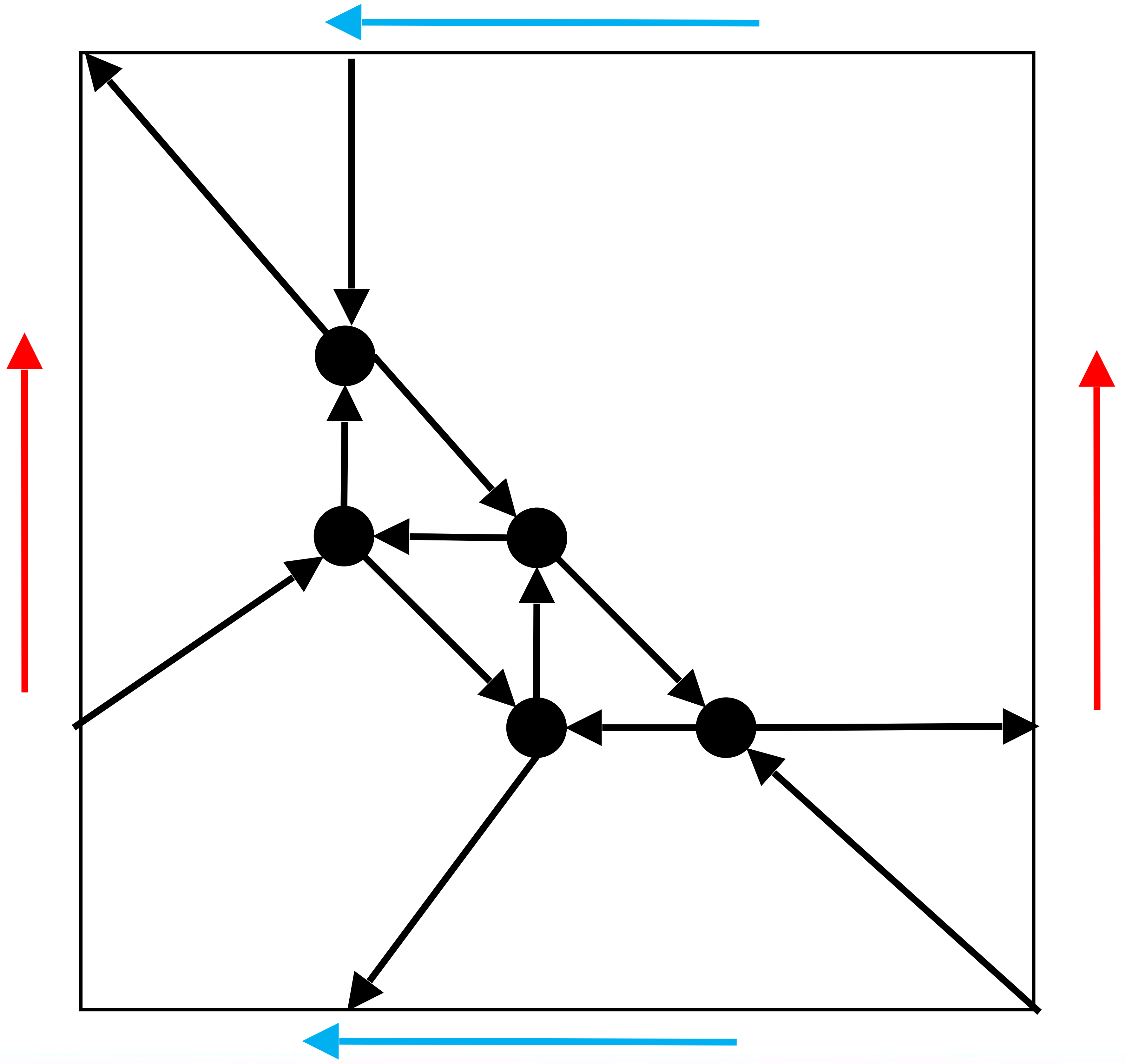
有向グラフの最小種数埋め込み

Observation 7.

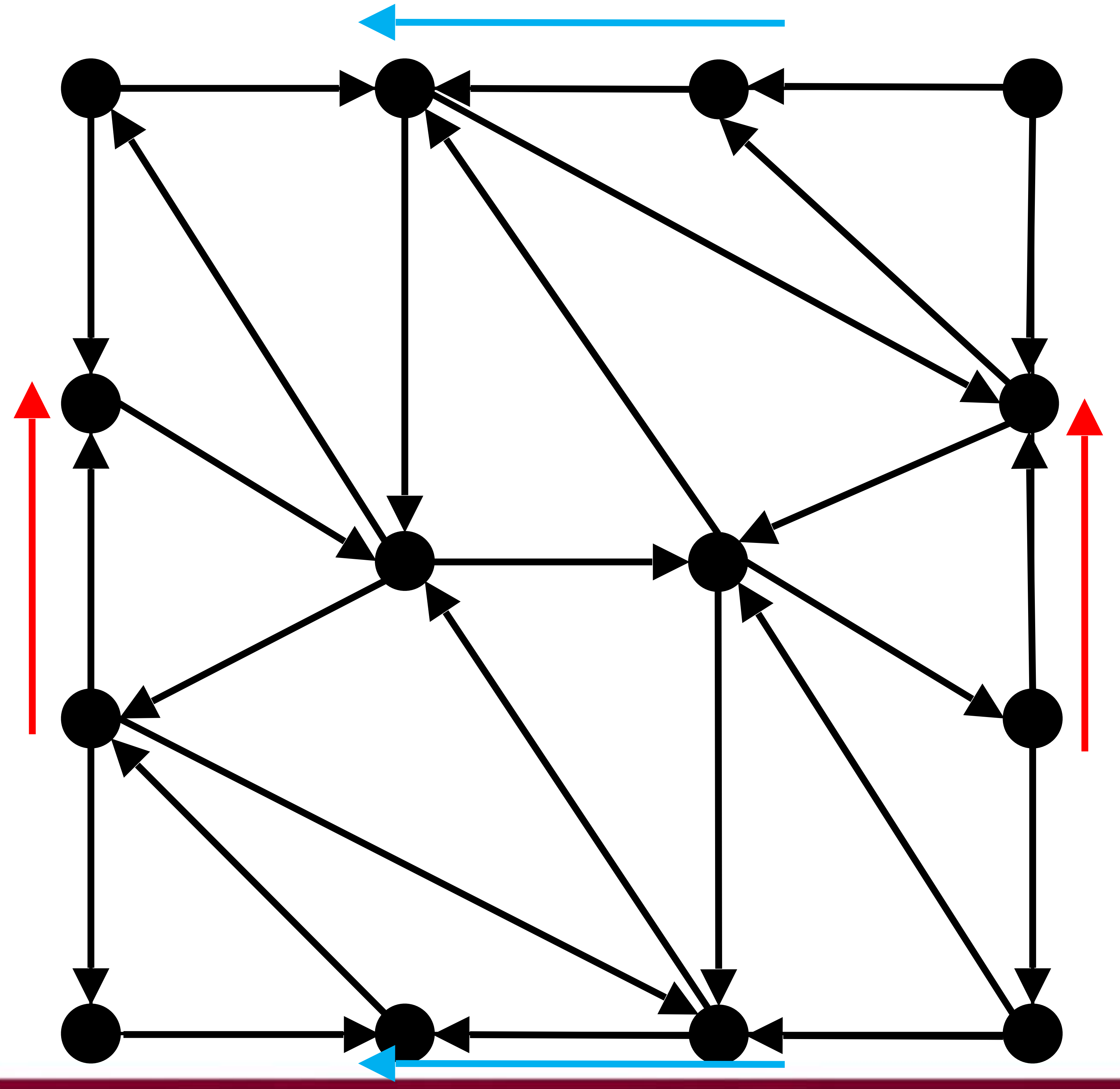
$n \leq 7$とし，T_nを無向基礎グラフがK_nと同型な正則有向グラフとする．

このとき，T_nは一意的であり，かつトーラスに埋め込み可能である．

T_5



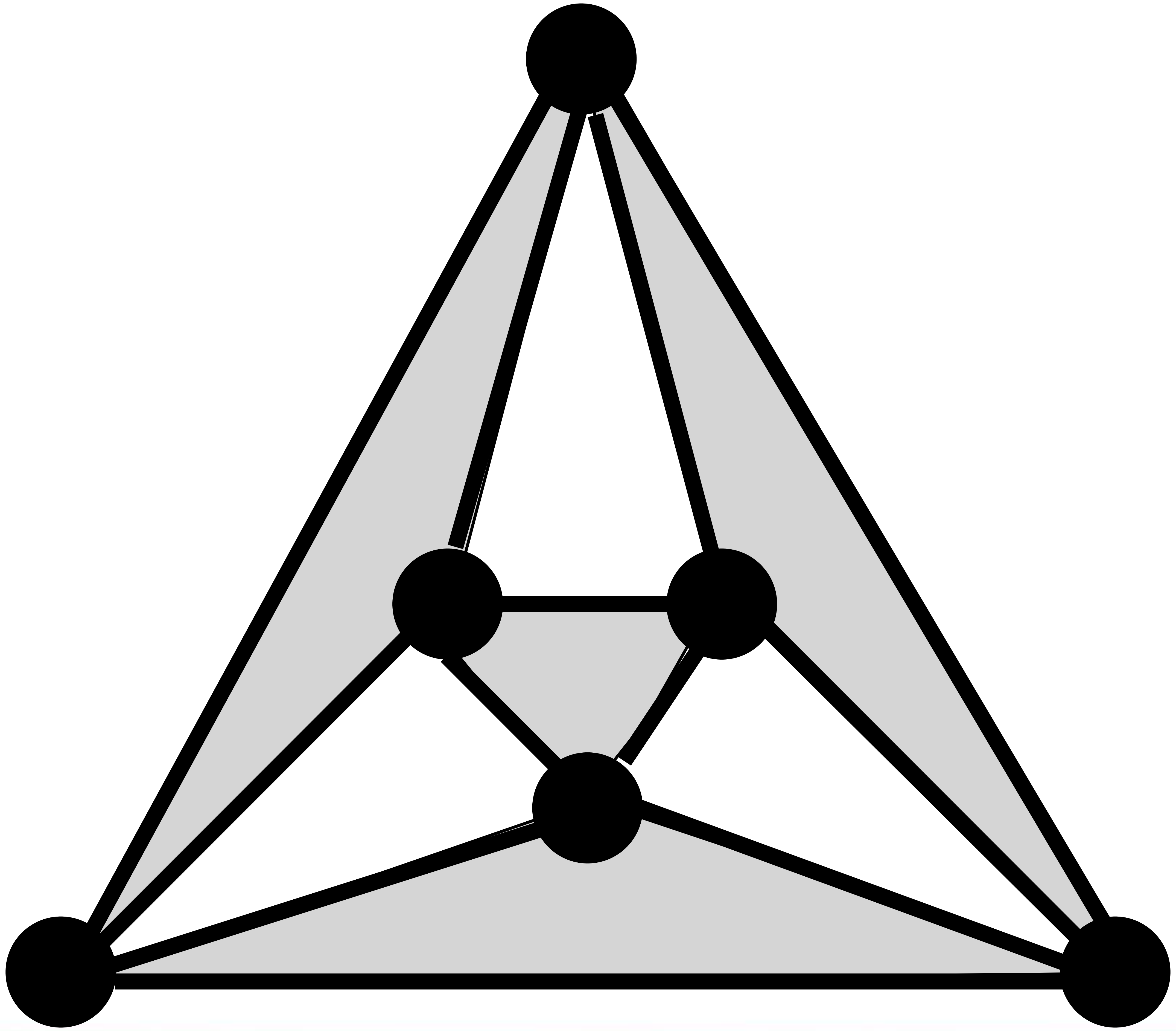
T_7



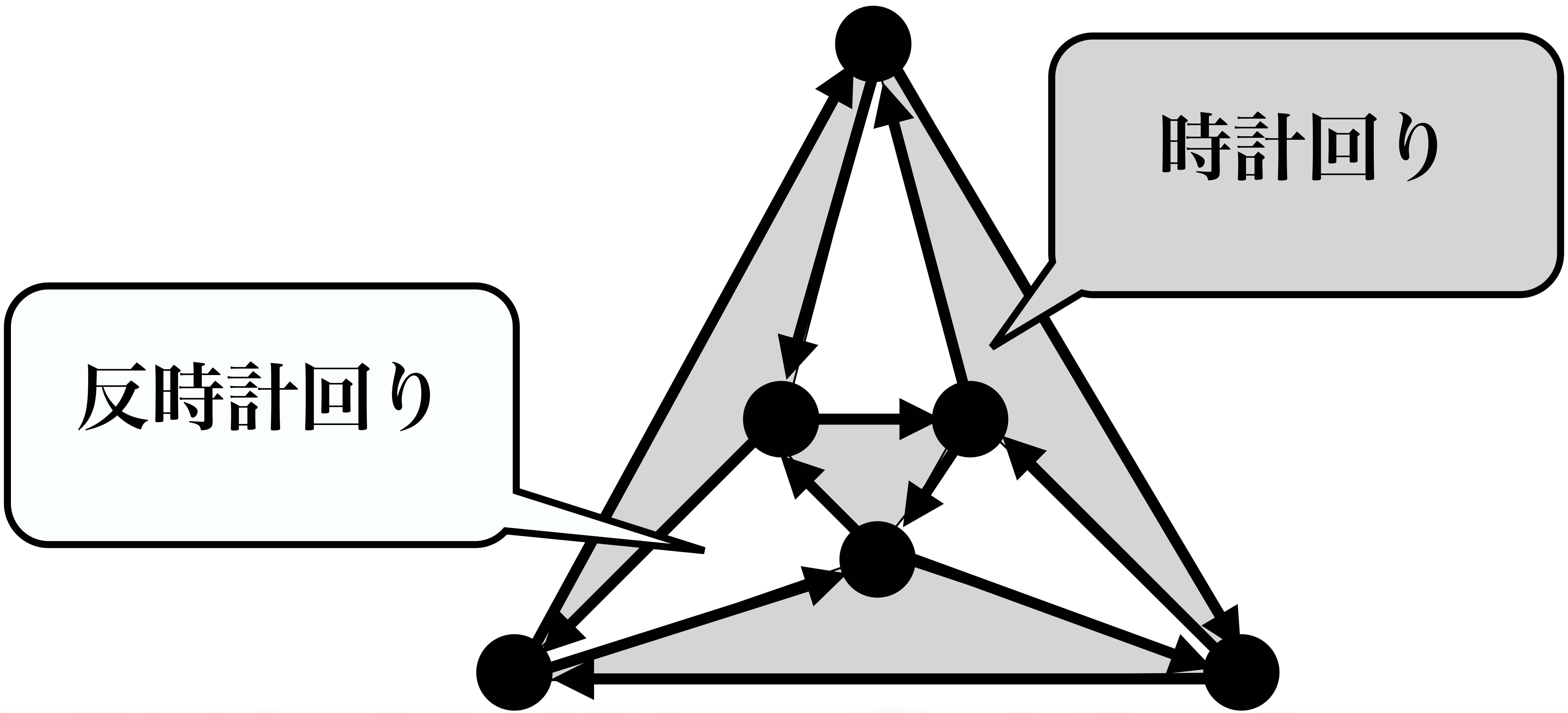
本日の内容

1. 無向グラフの閉曲面への埋め込み
2. 無向グラフの良い向き付け
3. 良い向き付けと半辺彩色

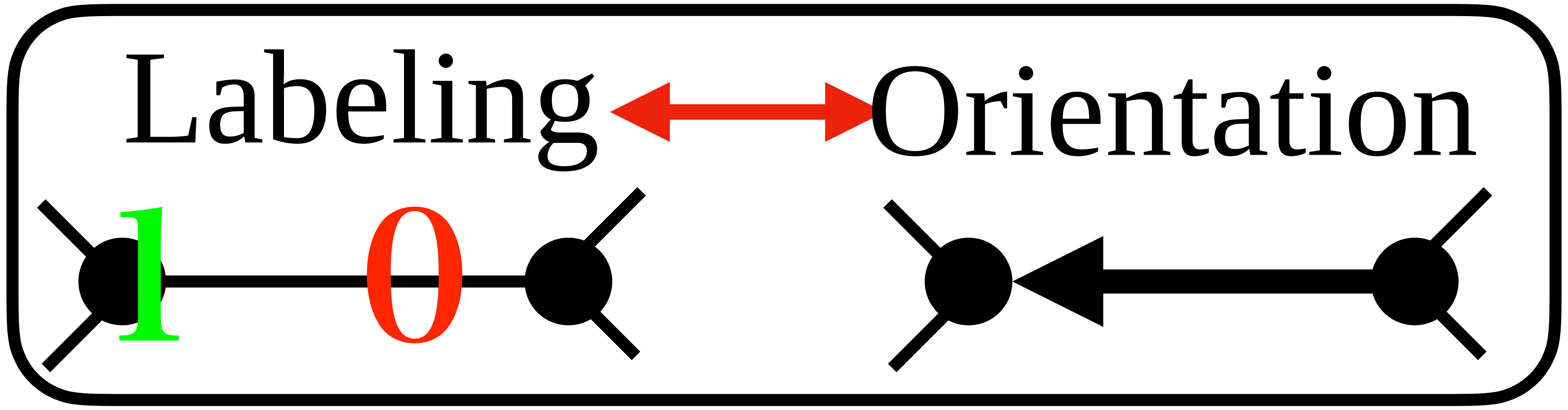
良い向き付けと半辺彩色

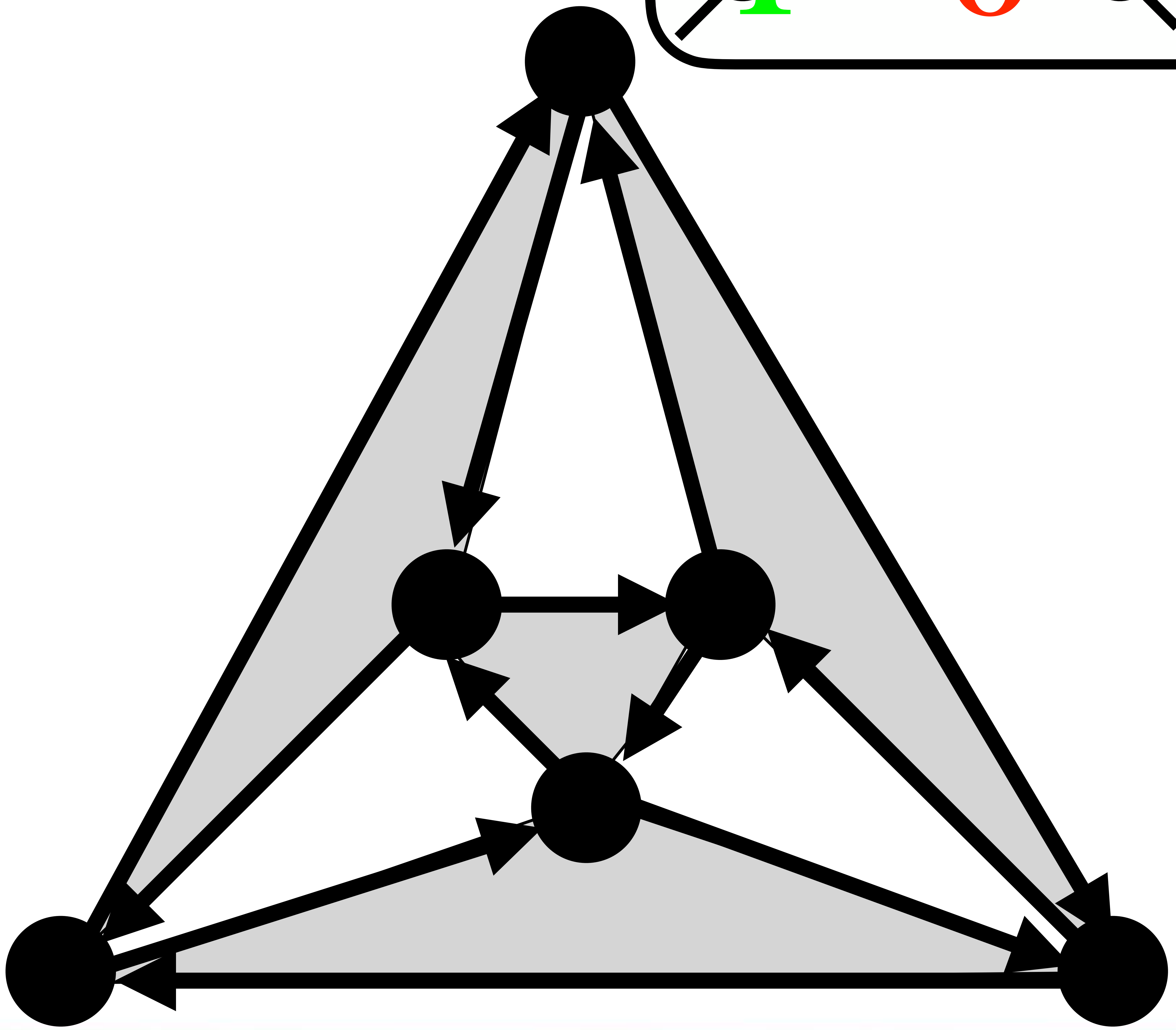


良い向き付けと半辺彩色

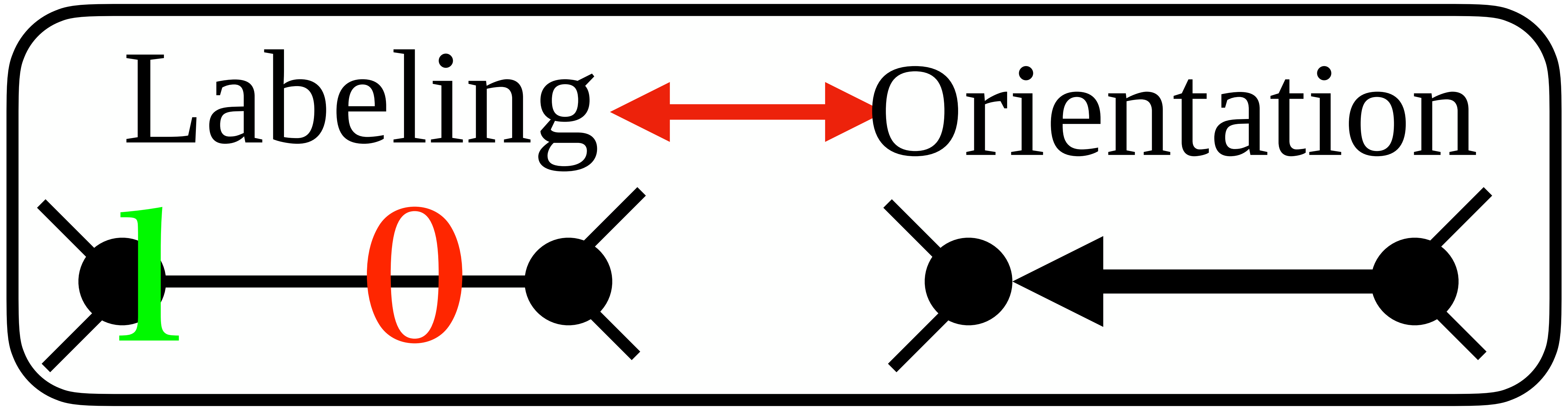


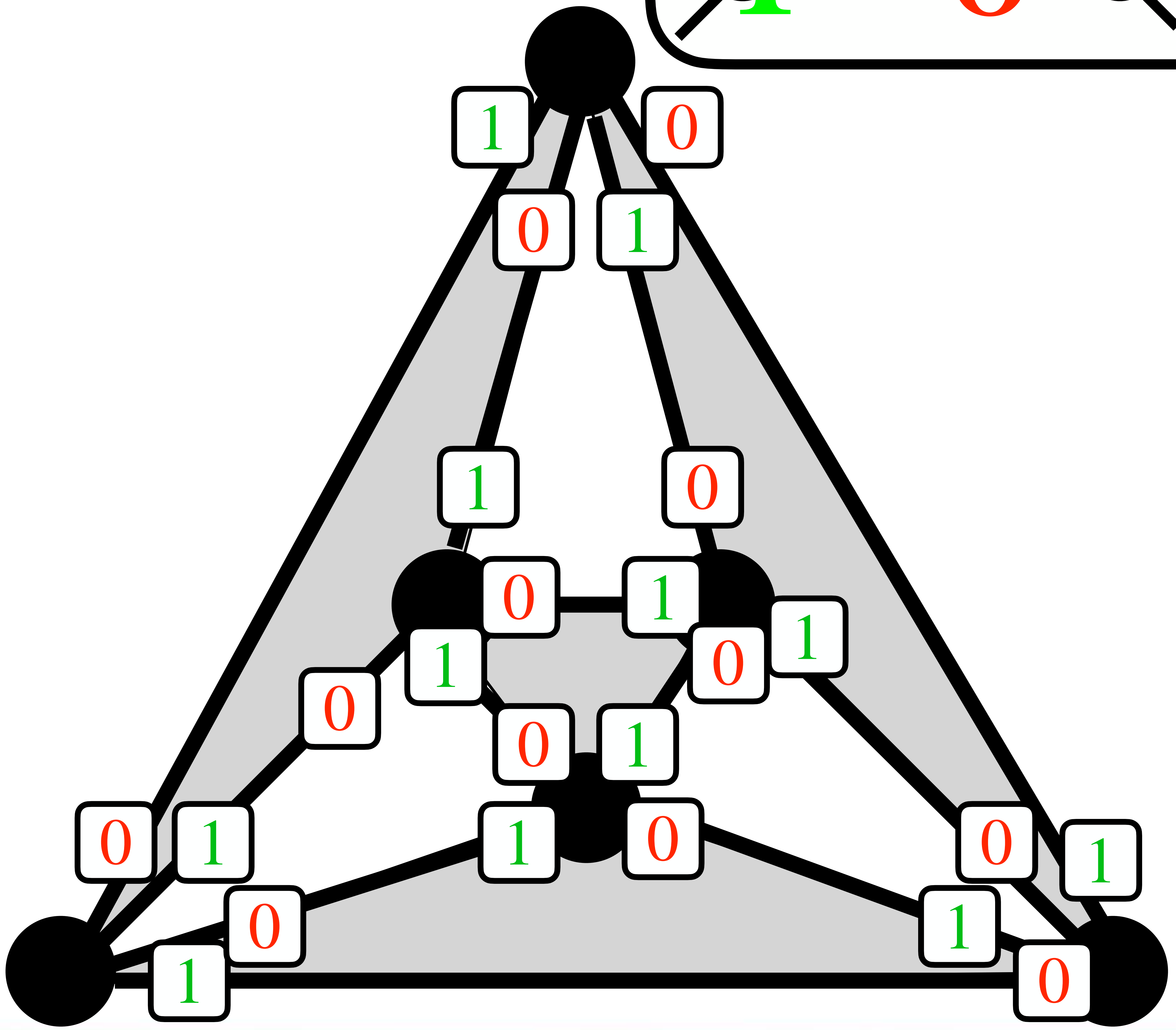
良い向き付けと半辺彩色



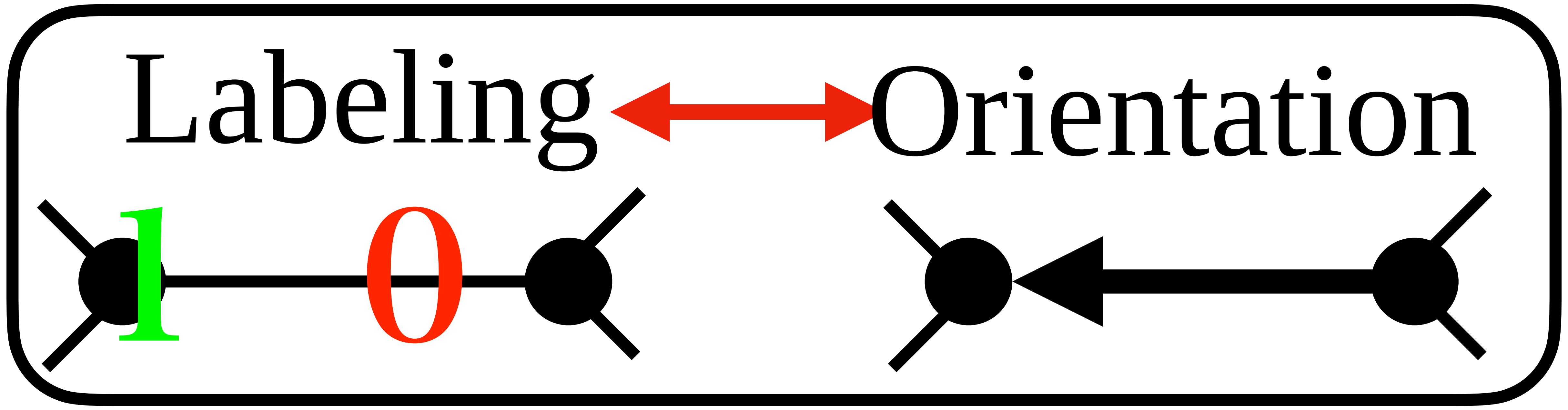


良い向き付けと半辺彩色

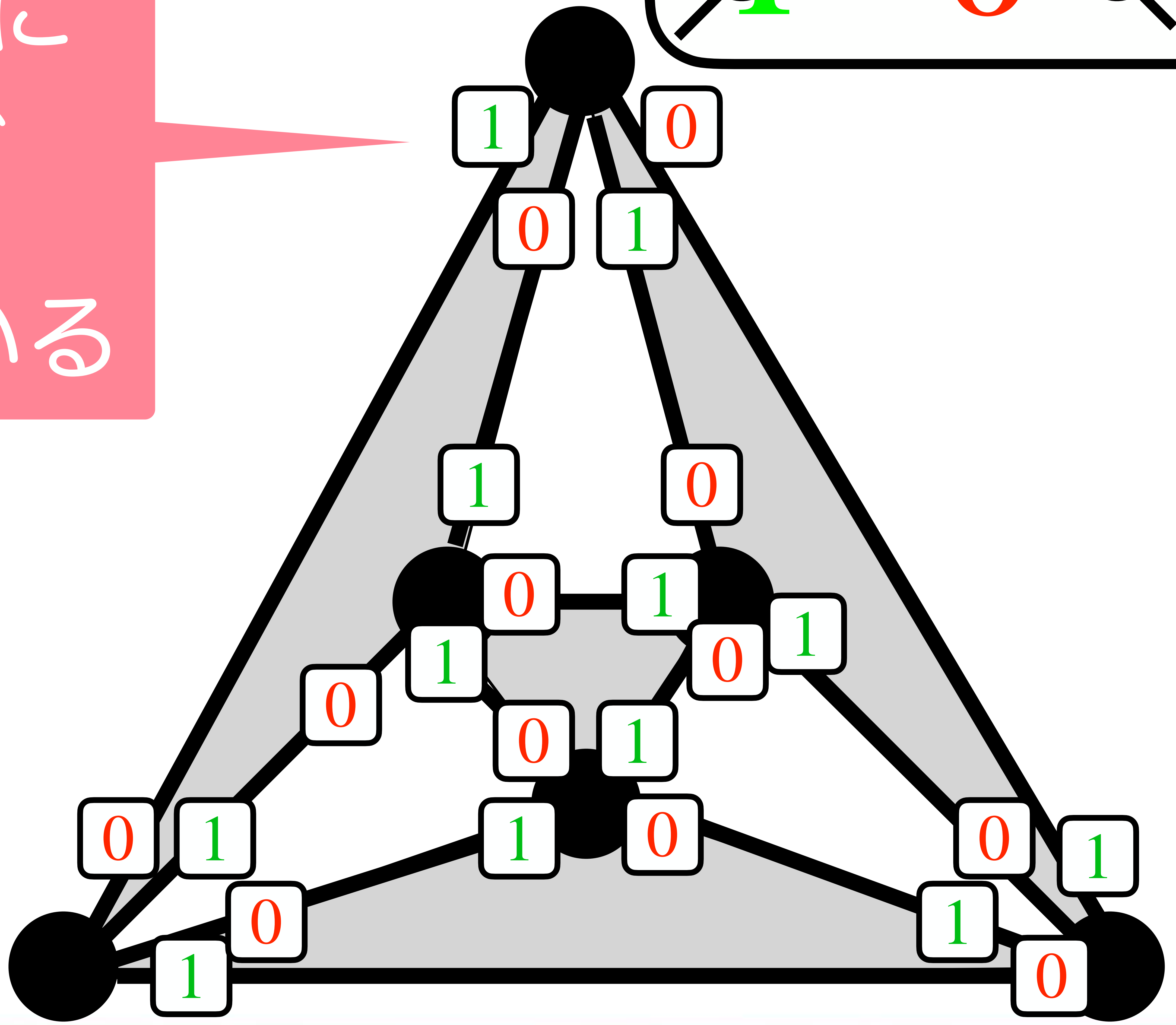




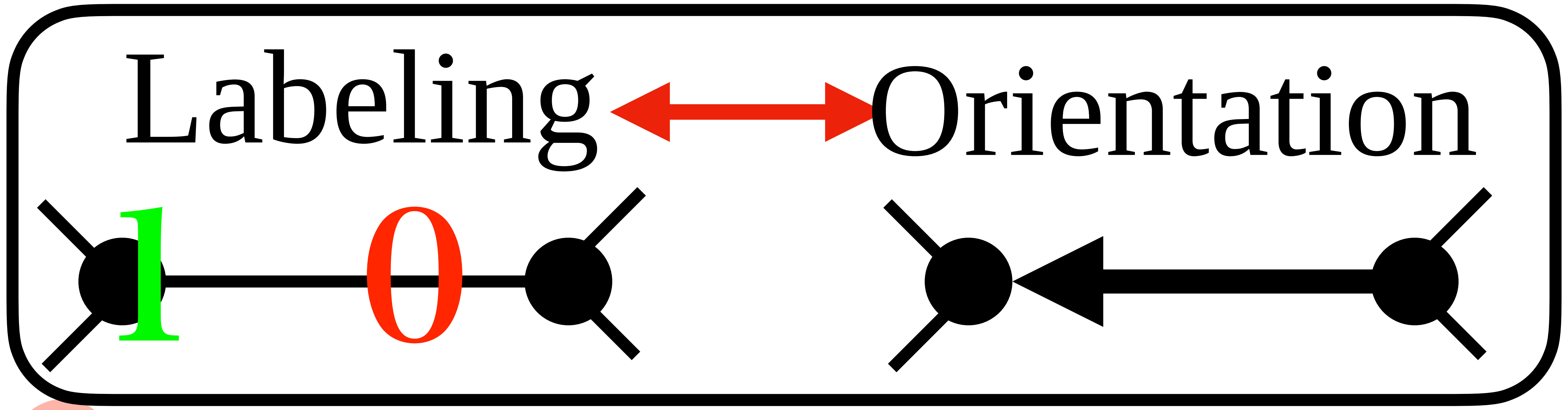
良い向き付けと半辺彩色



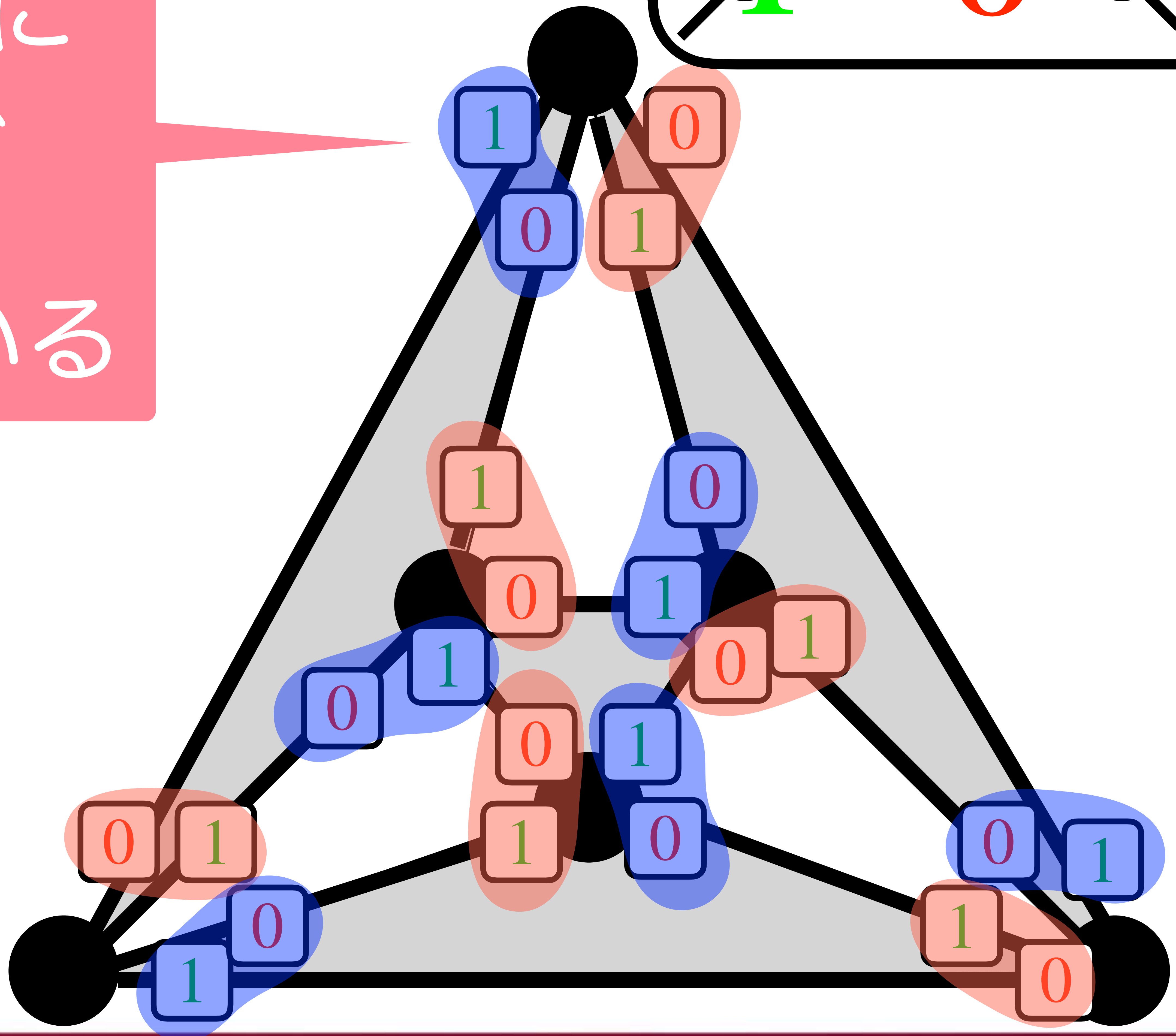
各頂点の周りに
巡回群 Z_n が
順々に現れている



良い向き付けと半辺彩色

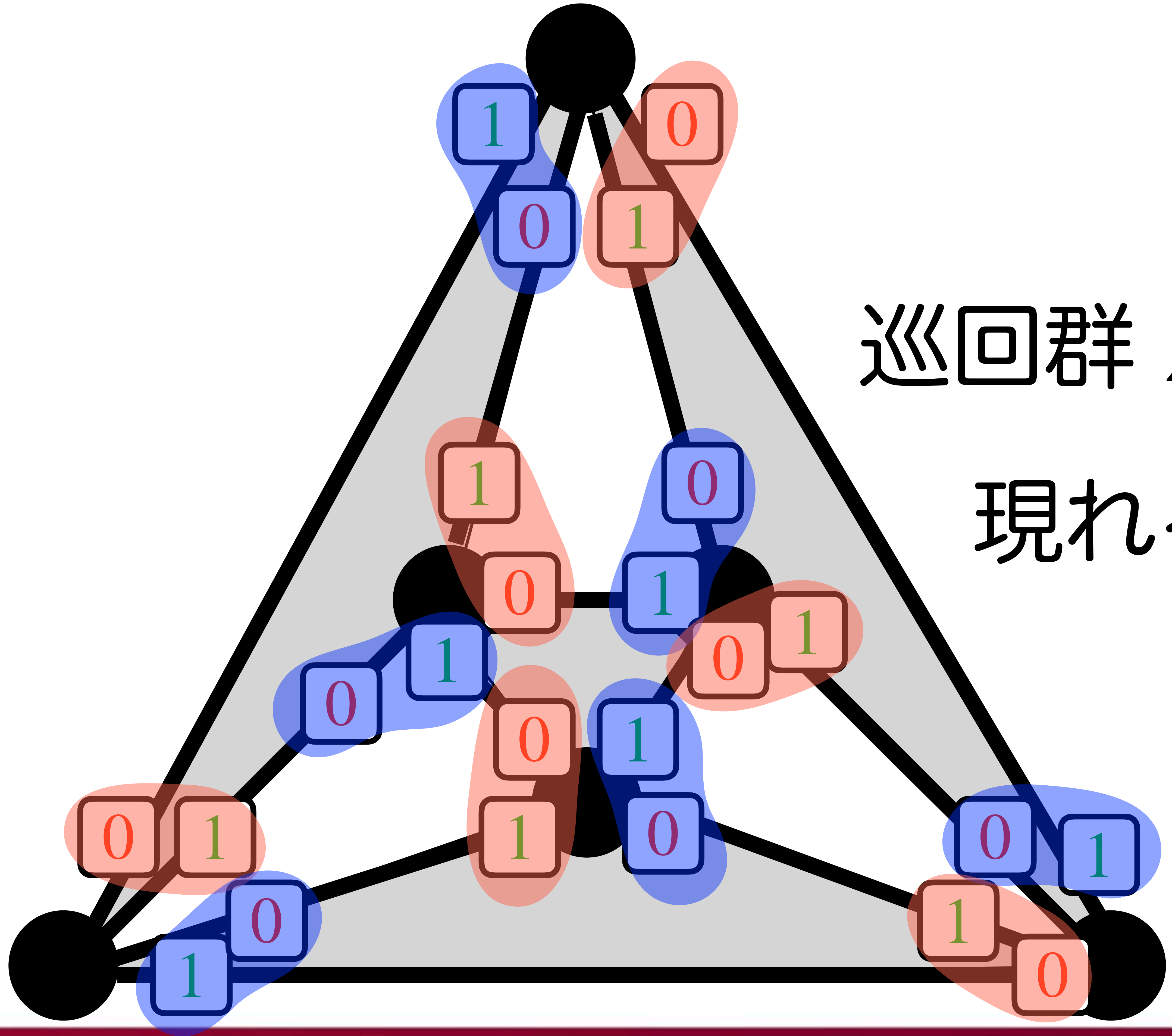


各頂点の周りに
巡回群 Z_n が
順々に現れている



良い向き付けと半辺彩色の問題提起

ある閉曲面に埋め込まれた t -正則グラフの各頂点周りに巡回群 Z_s が順々に現れる半辺彩色は存在するか？



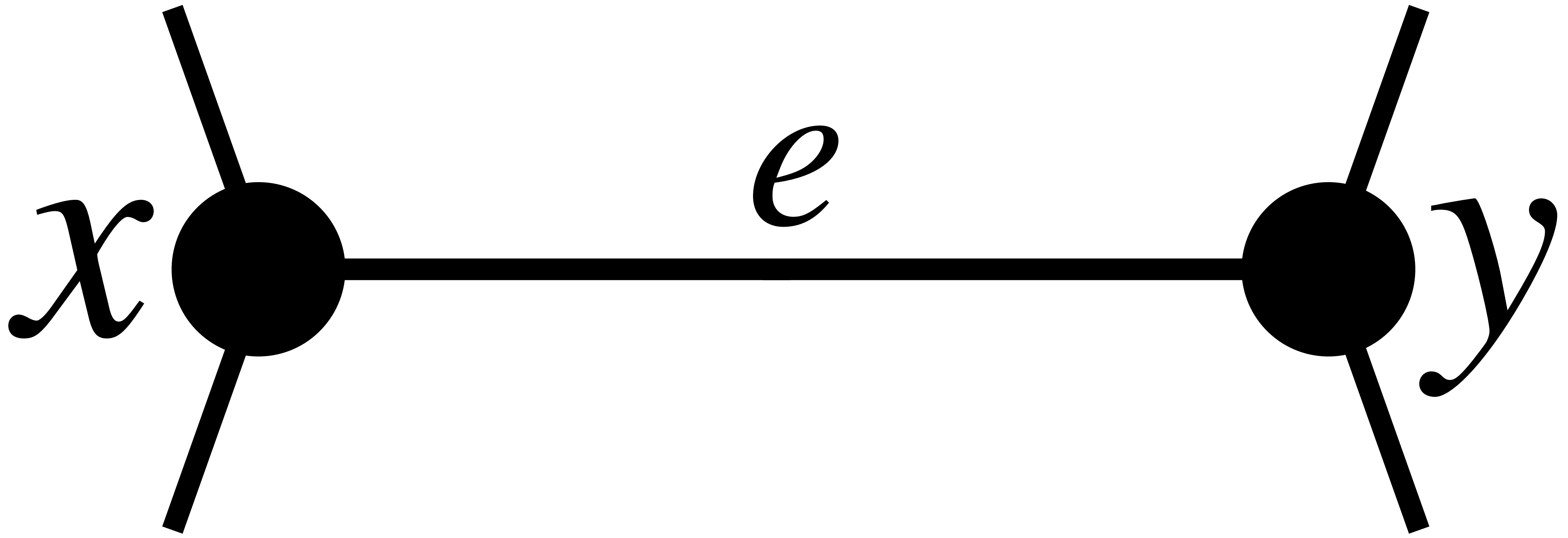
巡回群 Z_2 が各点の周りに現れる4-正則グラフ

半辺彩色の定義

Definition (Clockwise labeling).

ある向き付け可能閉曲面に埋め込まれた t-正則グラフに対して，clockwise s-labelingとは次の２つの条件を満たすラベリングである．（ただし，$t \equiv 0 \pmod{s}$．）

Rule 1. $i, j \in Z_s$ かつ, $i \neq j$

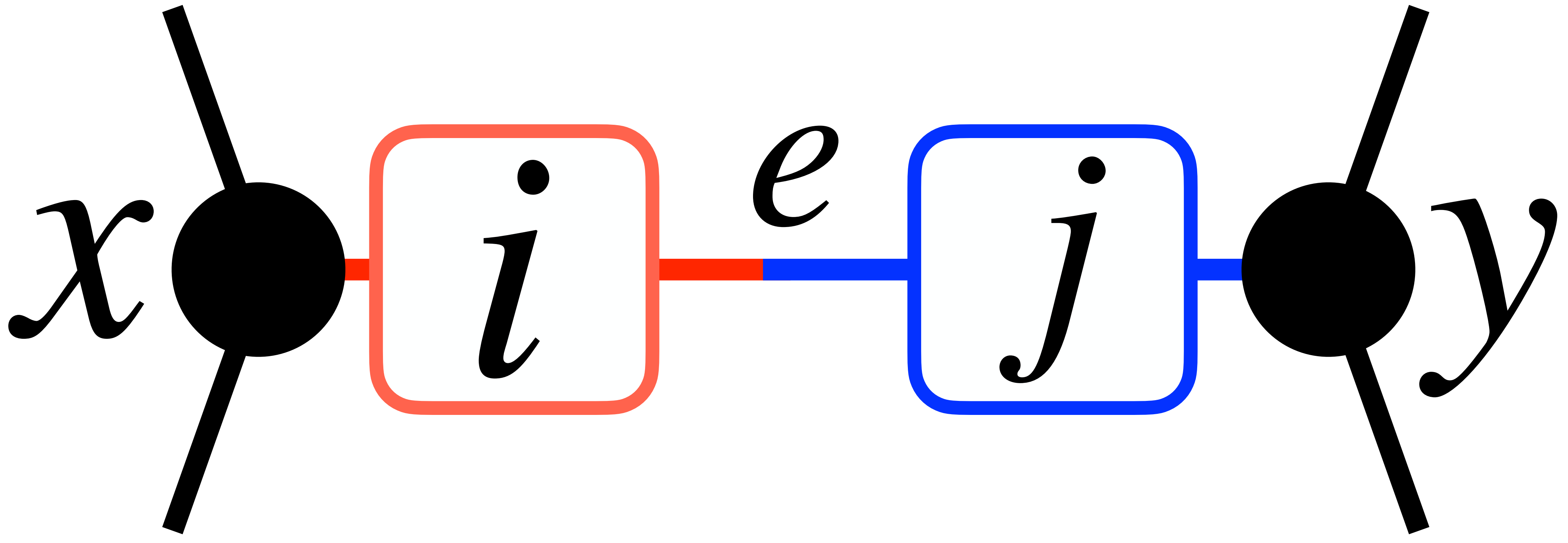


半辺彩色の定義

Definition (Clockwise labeling).

ある向き付け可能閉曲面に埋め込まれた t -正則グラフに対して，clockwise s-labelingとは次の２つの条件を満たすラベリングである．（ただし，$t \equiv 0 \pmod{s}$．）

Rule 1.　$i, j \in Z_s$ かつ, $i \neq j$



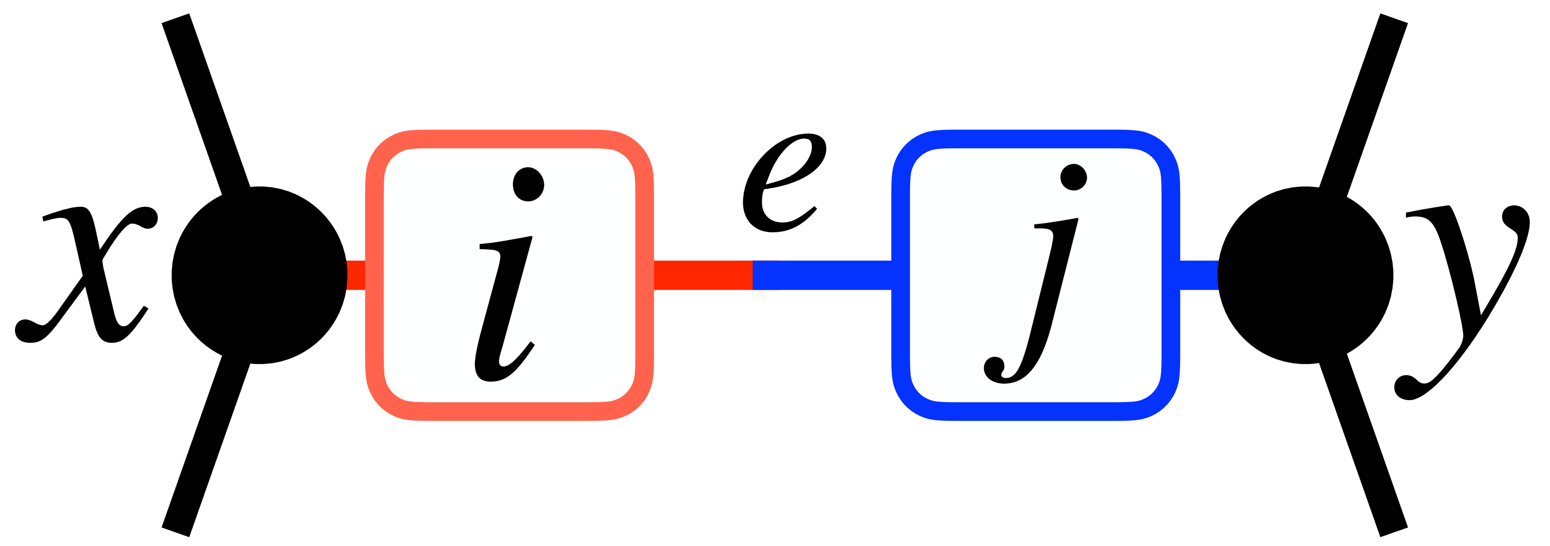
半辺彩色の定義

Definition (Clockwise labeling).

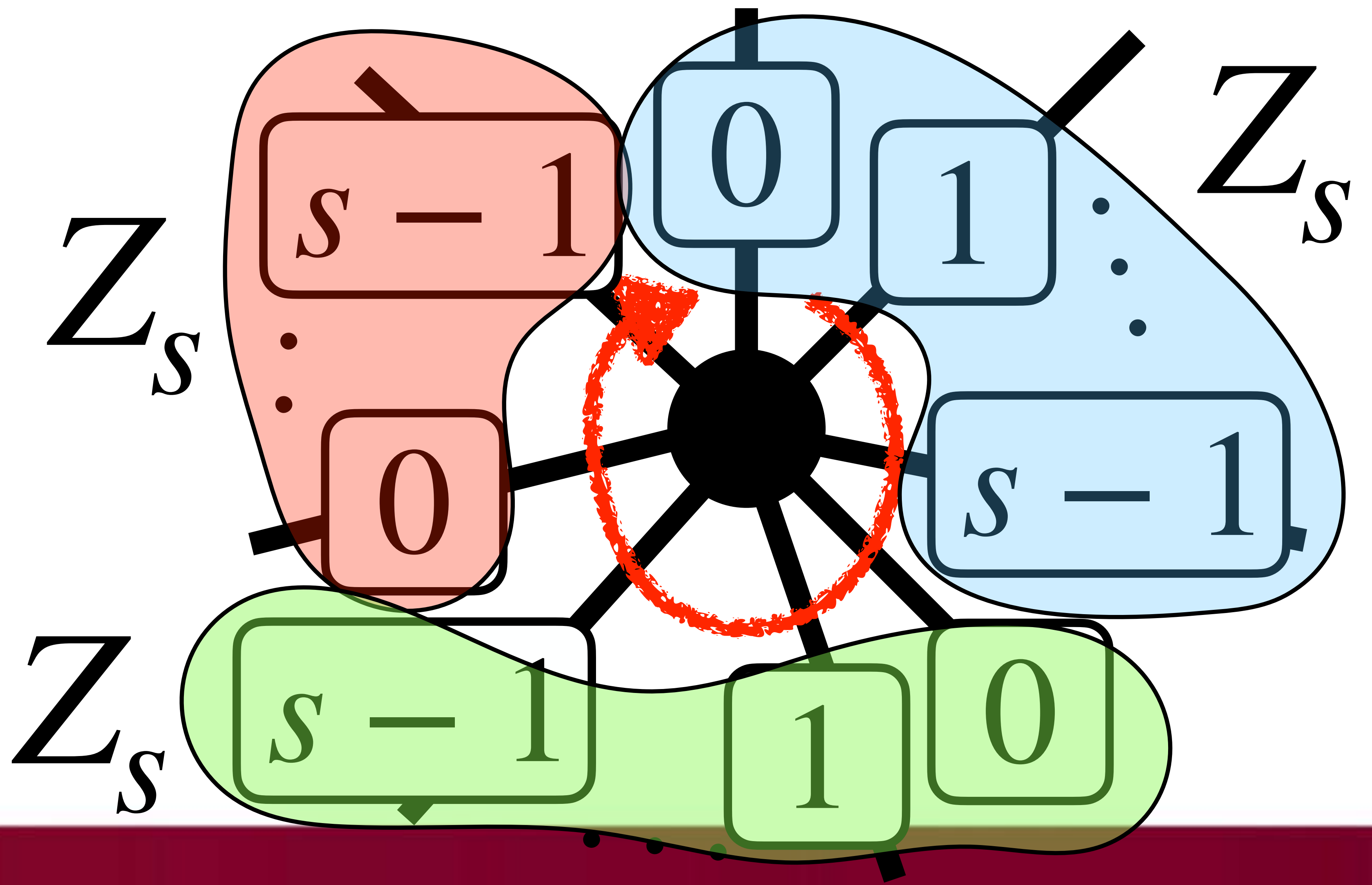
ある向き付け可能閉曲面に埋め込まれた t -正則グラフに対して，clockwise s-labelingとは次の２つの条件を満たすラベリングである．（ただし，$t \equiv 0 \pmod{s}$．）

Rule 1.

$i, j \in Z_s$ かつ, $i \neq j$



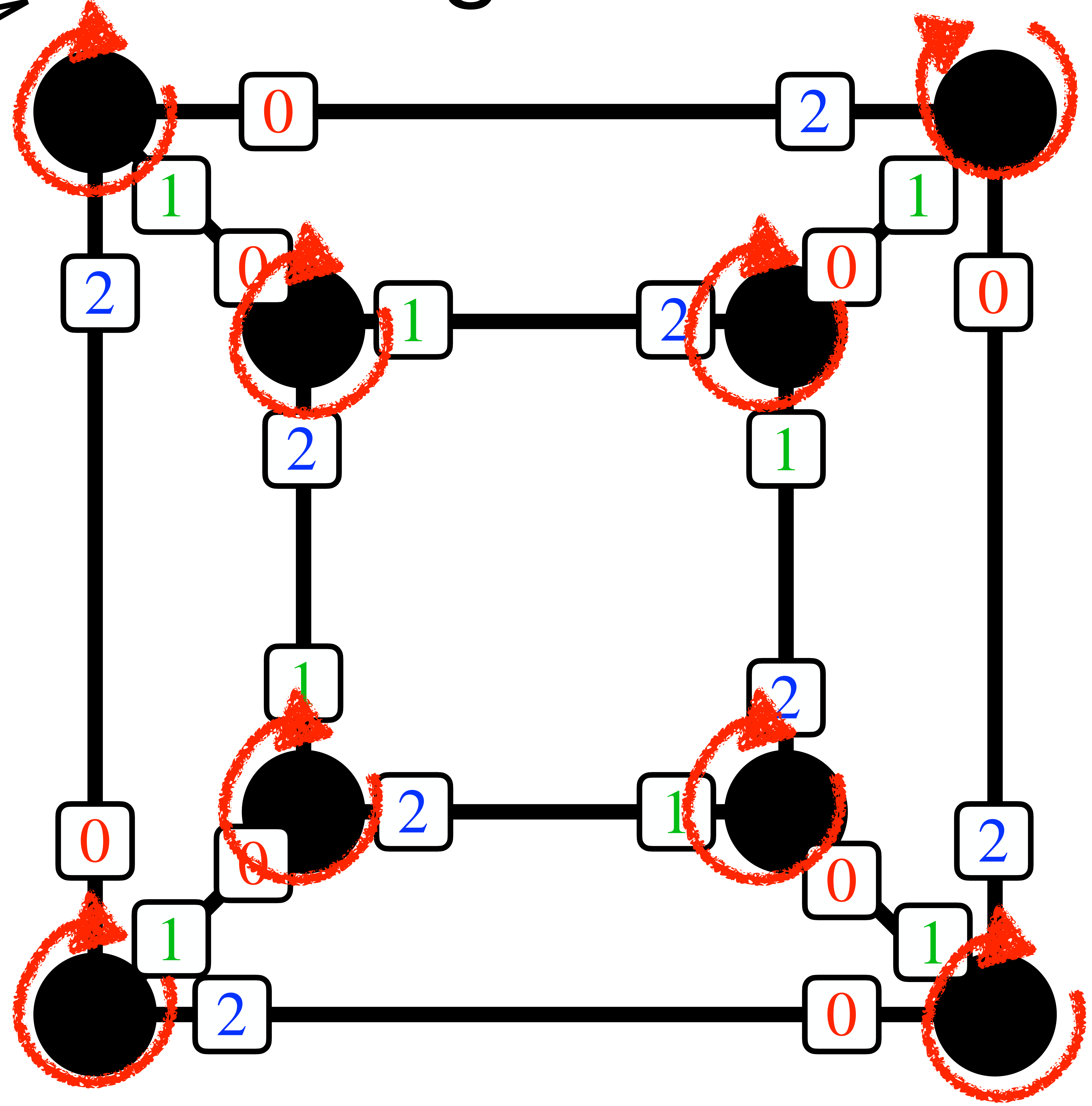
Rule 2.



Clockwise labeling（半辺彩色）の例

Clockwise 3-labelingを持つ3-正則平面グラフ

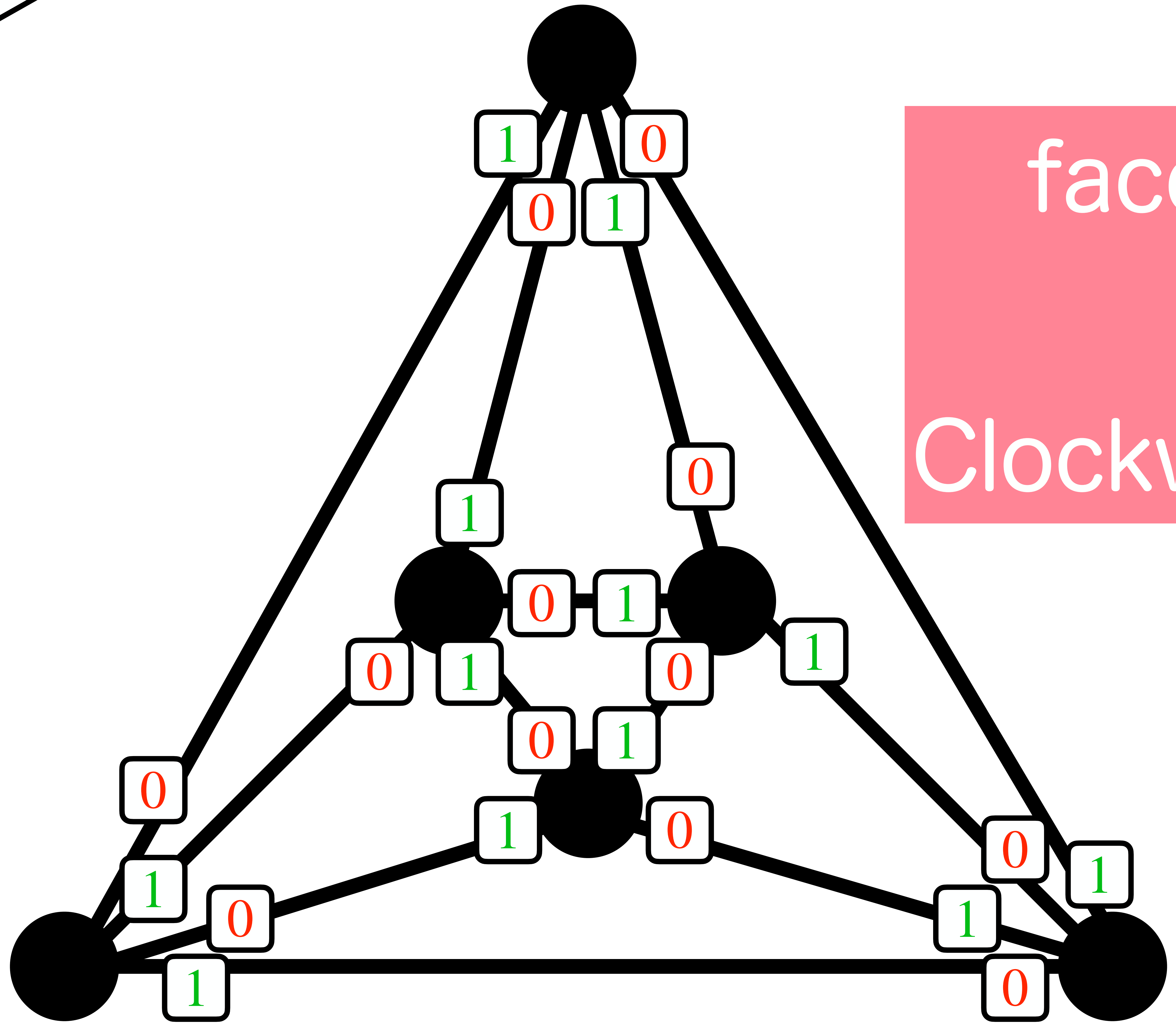
$\{0, 1, 2\}$



Clockwise labeling（半辺彩色）の例

Clockwise 2-labelingを持つ4-正則平面グラフ

$\{0, 1\}$



face 2-coloring

⇕

Clockwise 2-labeling

Clockwise labeling（半辺彩色）の例

face 2-coloring

⇕

Clockwise 2-labeling

⇕ 拡張できないか？

Clockwise ?-labeling

半辺彩色の塗り替え

Observation 7.

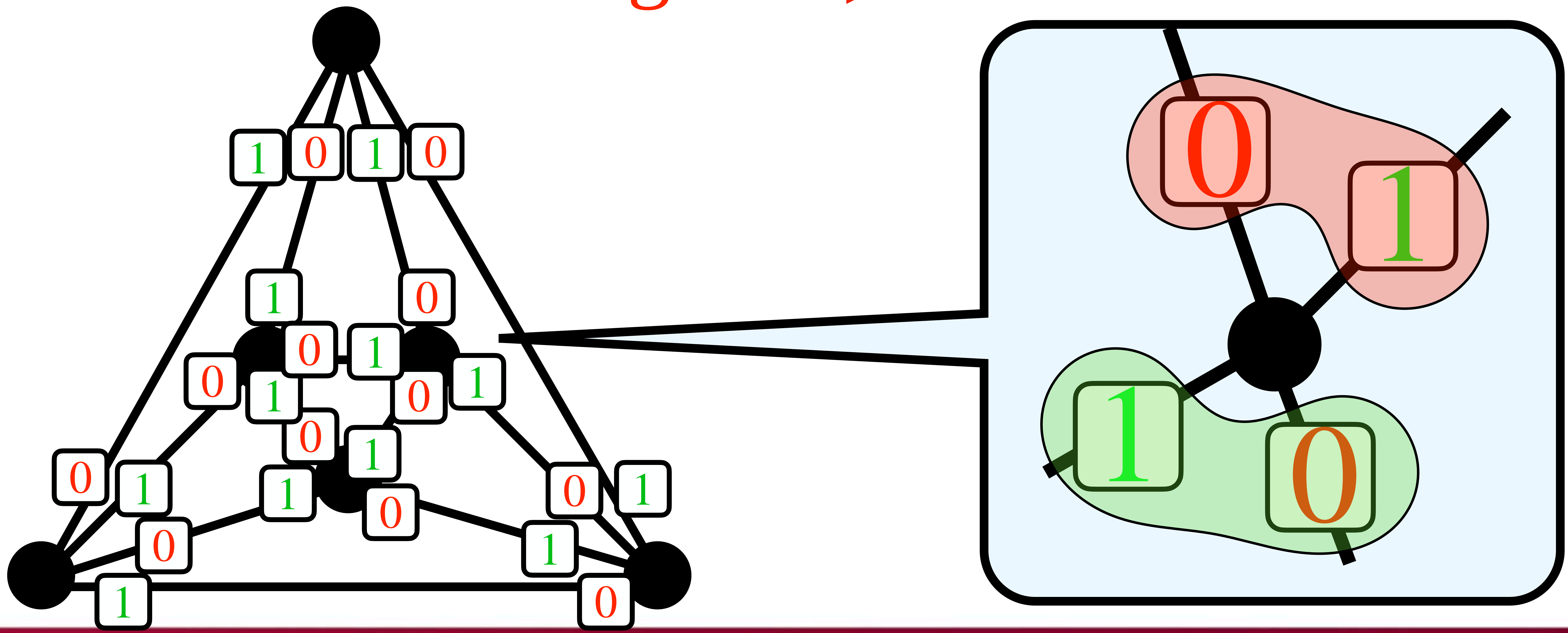
向き付け可能閉曲面Fに埋め込まれたk-正則グラフGがclockwise i-labelingを持つならば，Gはclockwise j-labelingを持つ．ただし，$j \equiv 0 \pmod{i}$かつ，$k \equiv 0 \pmod{j}$．）

Clockwise 2-labeling → Clockwise 4-labeling

Observation 7.

向き付け可能閉曲面Fに埋め込まれたk-正則グラフGがclockwise i-labelingを持つならば，Gはclockwise j-labelingを持つ．ただし，$j \equiv 0 \pmod{i}$かつ，$k \equiv 0 \pmod{j}$．）

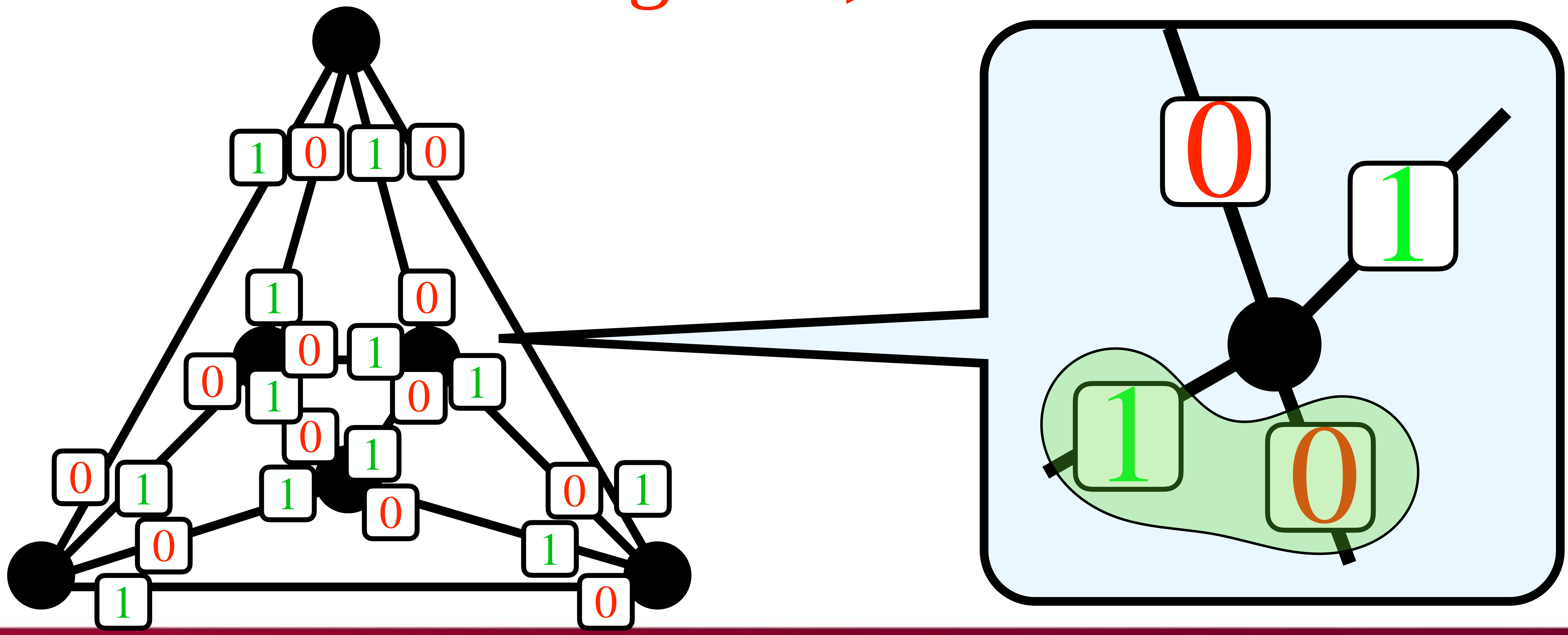
Clockwise 2-labeling → Clockwise 4-labeling



Observation 7.

向き付け可能閉曲面Fに埋め込まれたk-正則グラフGがclockwise i-labelingを持つならば，Gはclockwise j-labelingを持つ．ただし，$j \equiv 0 \pmod{i}$かつ，$k \equiv 0 \pmod{j}$．）

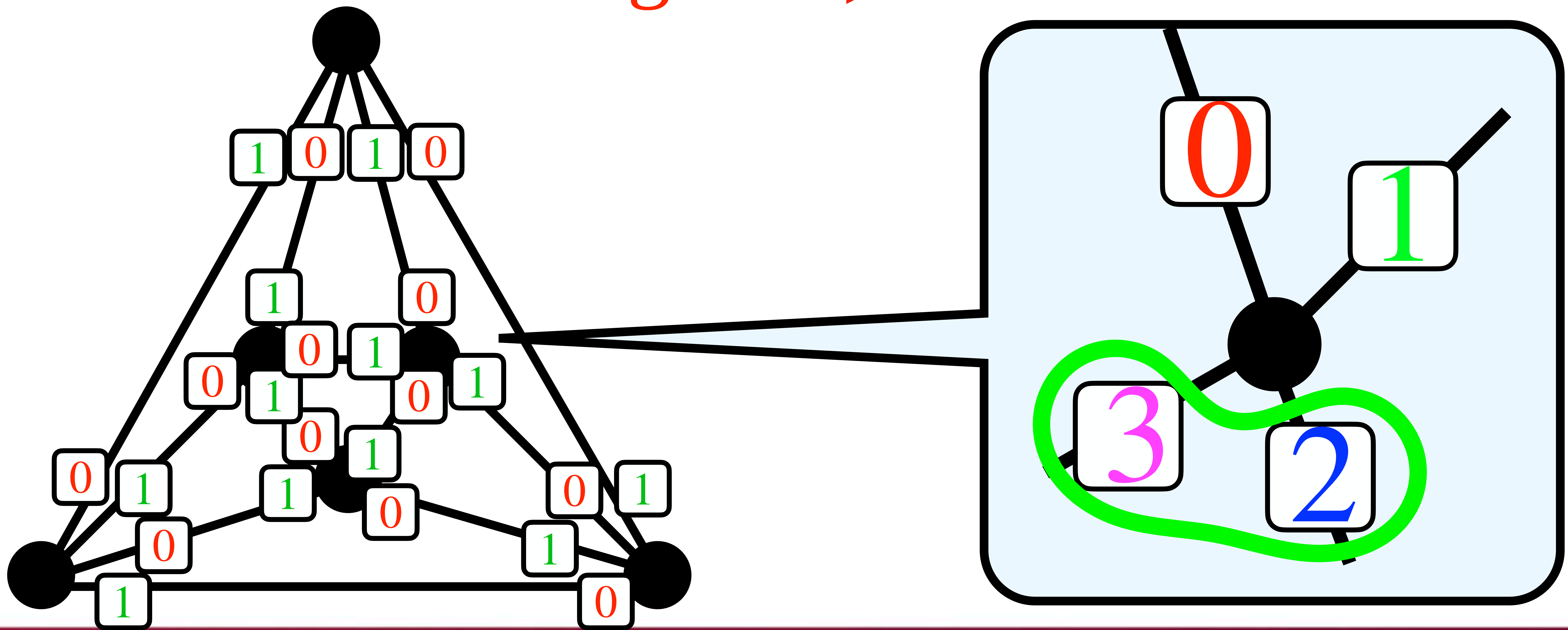
Clockwise 2-labeling → Clockwise 4-labeling



Observation 7.

向き付け可能閉曲面Fに埋め込まれたk-正則グラフGがclockwise i-labelingを持つならば，Gはclockwise j-labelingを持つ．ただし，$j \equiv 0 \pmod{i}$かつ，$k \equiv 0 \pmod{j}$．）

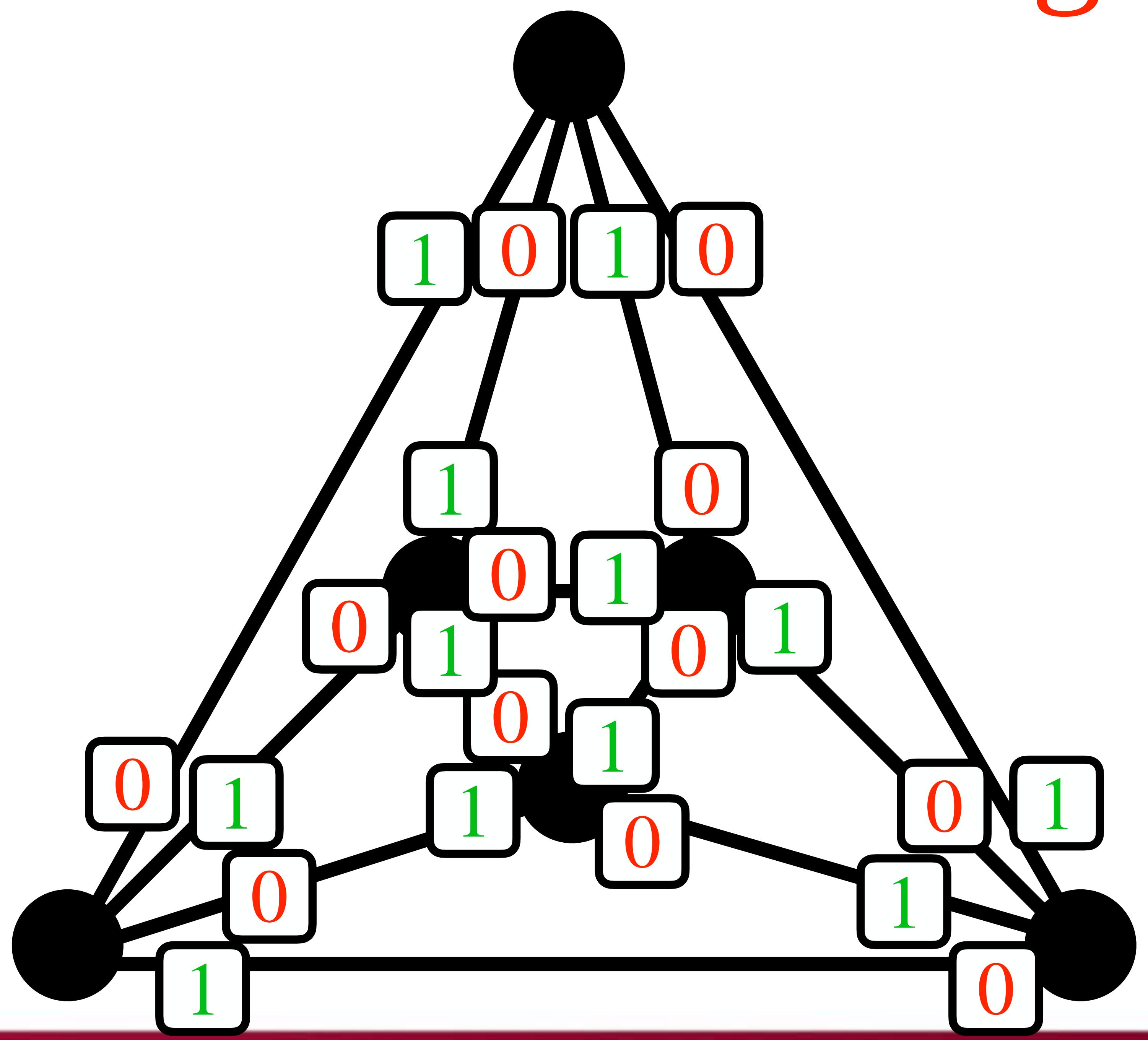
Clockwise 2-labeling → Clockwise 4-labeling

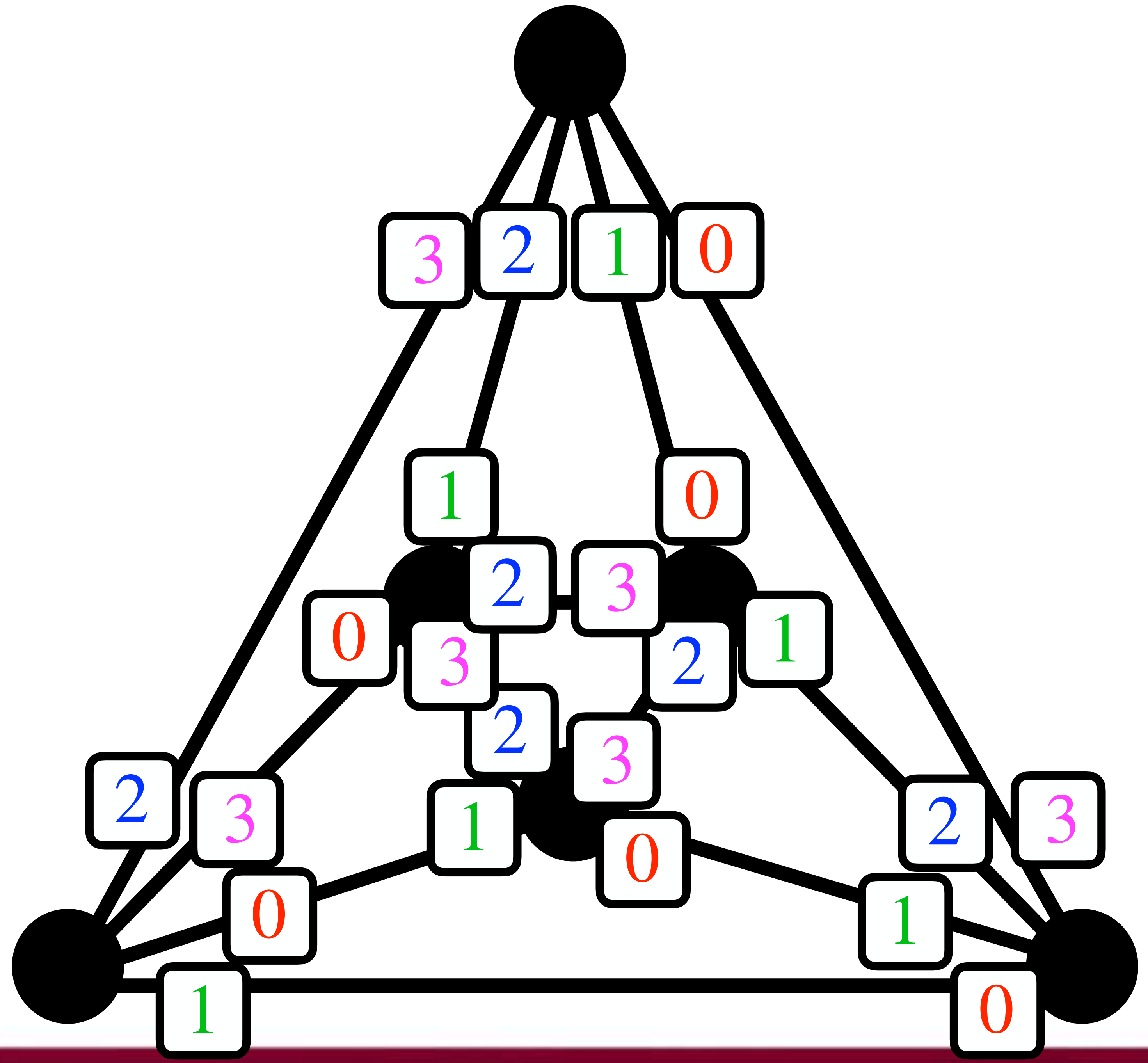


Observation 7.

向き付け可能閉曲面Fに埋め込まれたk-正則グラフGがclockwise i-labelingを持つならば，Gはclockwise j-labelingを持つ．ただし，$j \equiv 0 \pmod{i}$かつ，$k \equiv 0 \pmod{j}$．）

Clockwise 2-labeling → Clockwise 4-labeling

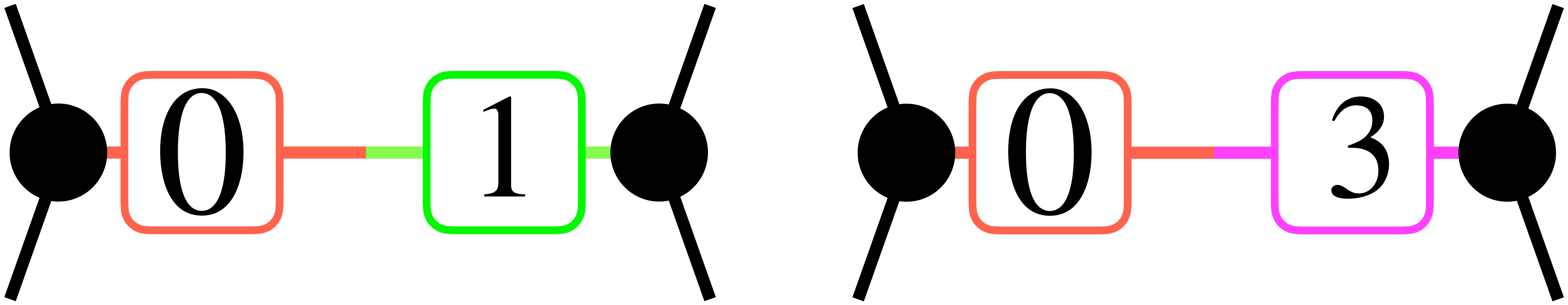




Observation 7.

向き付け可能閉曲面Fに埋め込まれたk-正則グラフGがclockwise i-labelingを持つならば，Gはclockwise j-labelingを持つ．ただし，$j \equiv 0 \pmod{i}$かつ，$k \equiv 0 \pmod{j}$．）

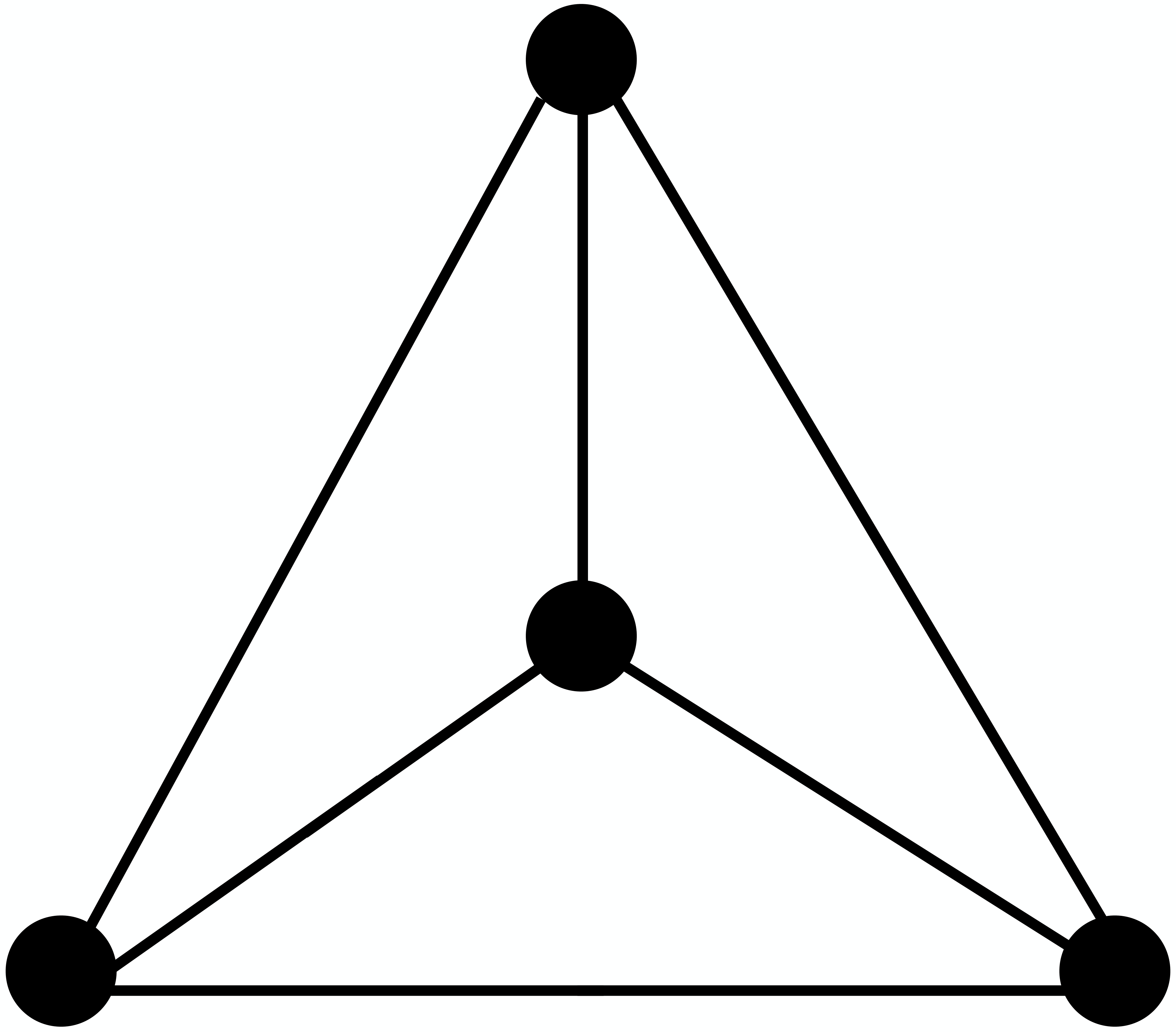
Clockwise 2-labeling → Clockwise 4-labeling



Labeling	一般の閉曲面
Clockwise 2-labeling	Face 2-colorableな埋め込みを持つ$2k$-正則グラフ
Clockwise $2i$-labeling	Clockwise 2-labelingを持つ$2k$-正則グラフ
Clockwise 3-labeling	**平面については？**

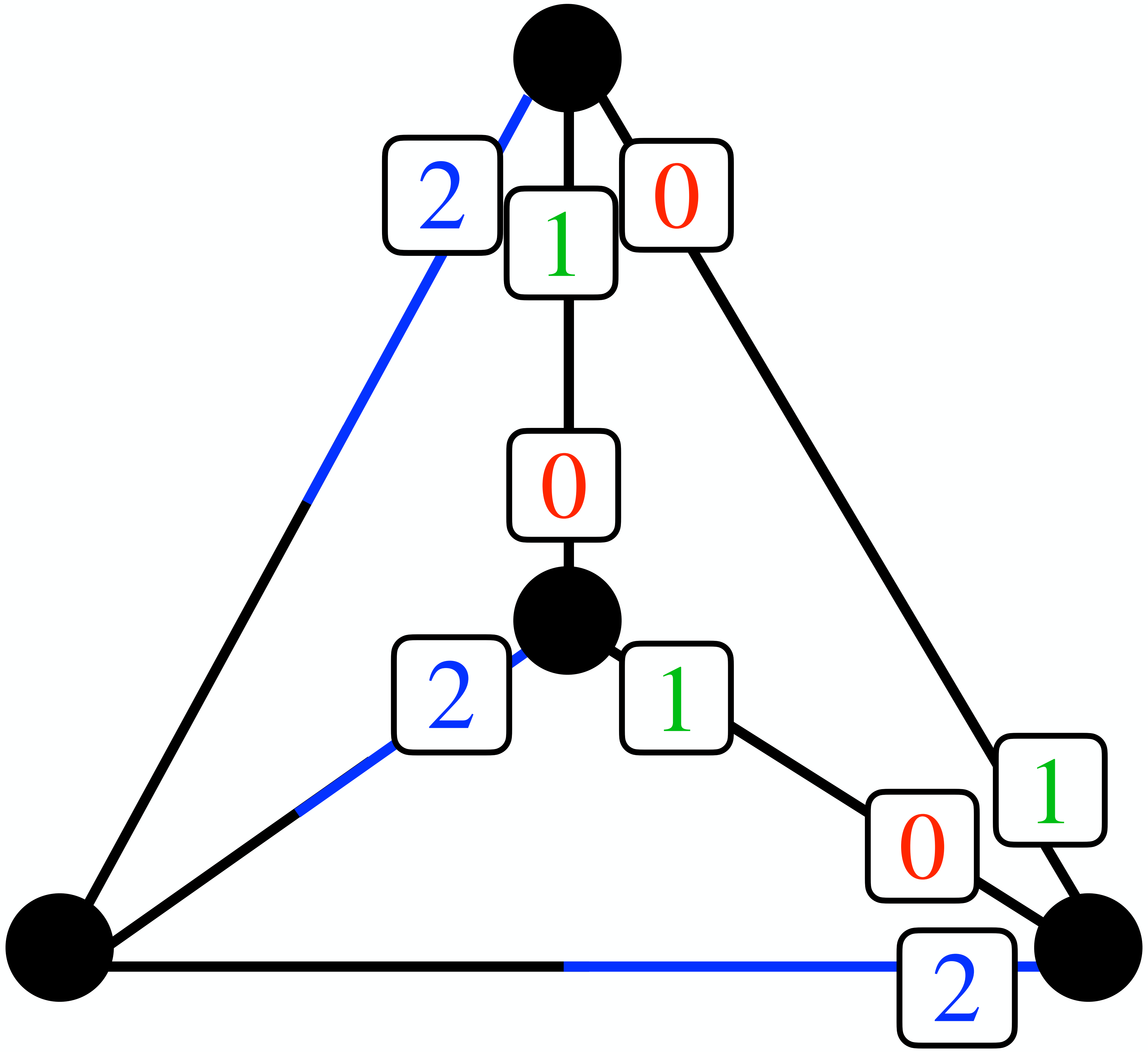
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



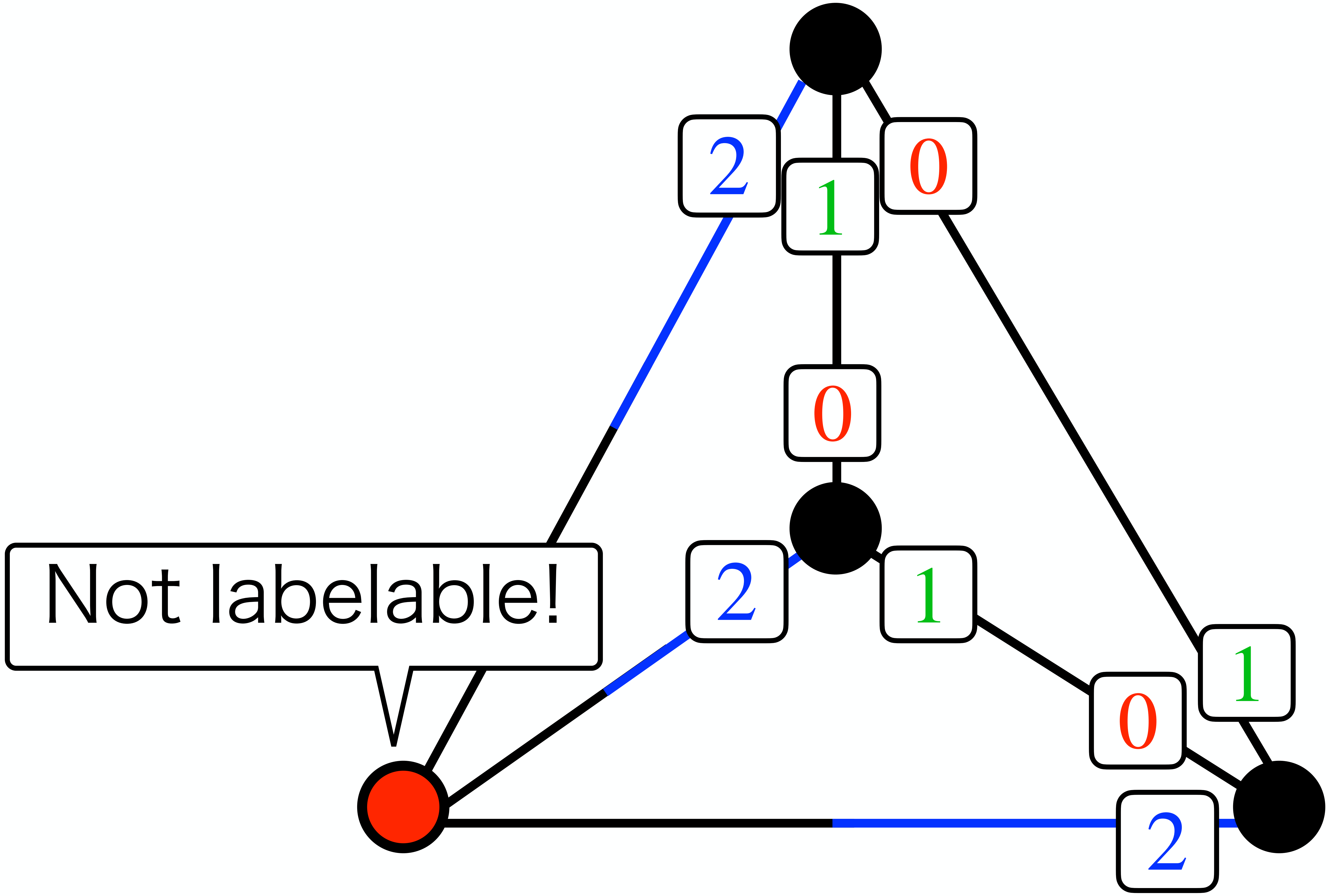
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ．



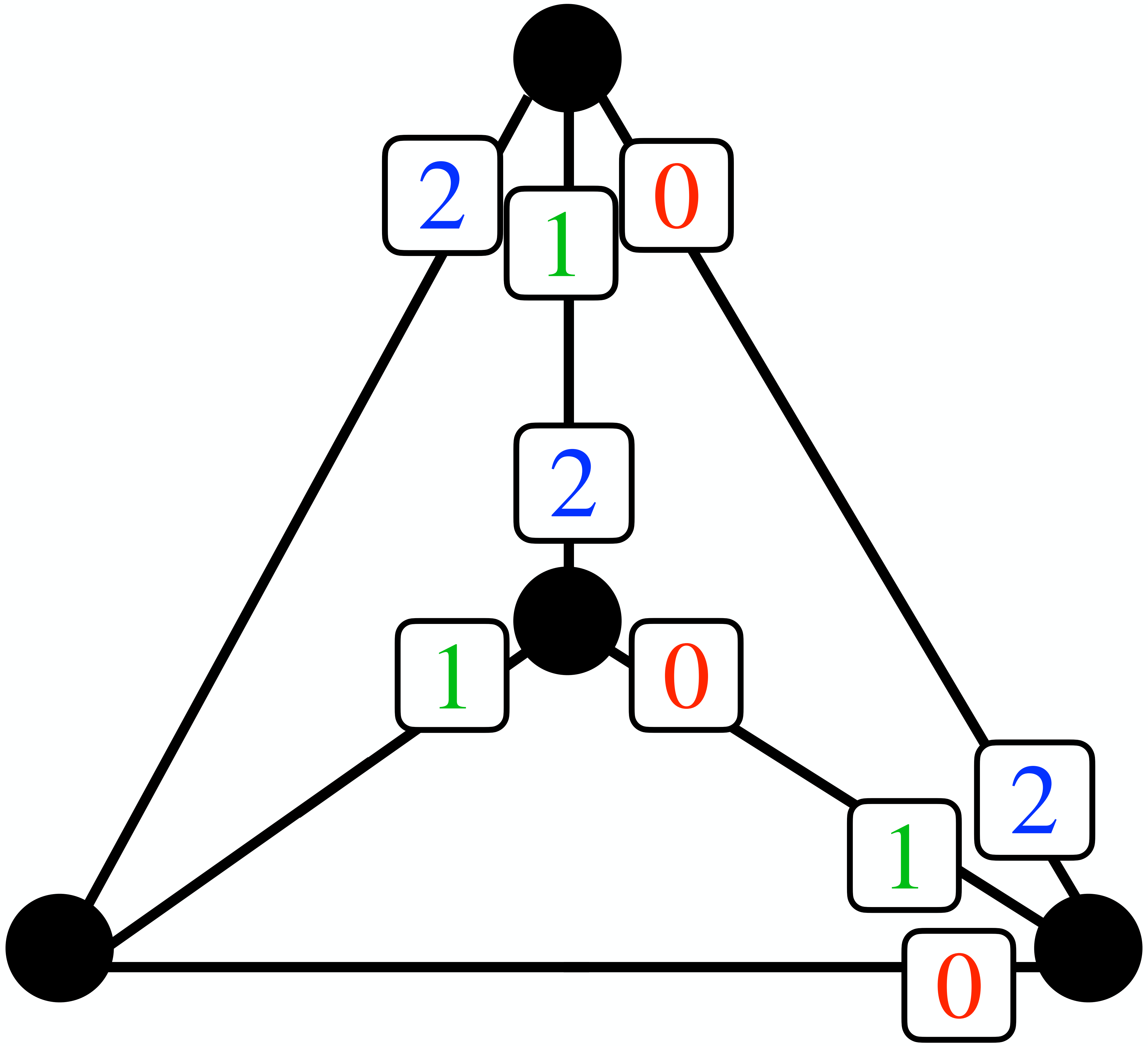
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



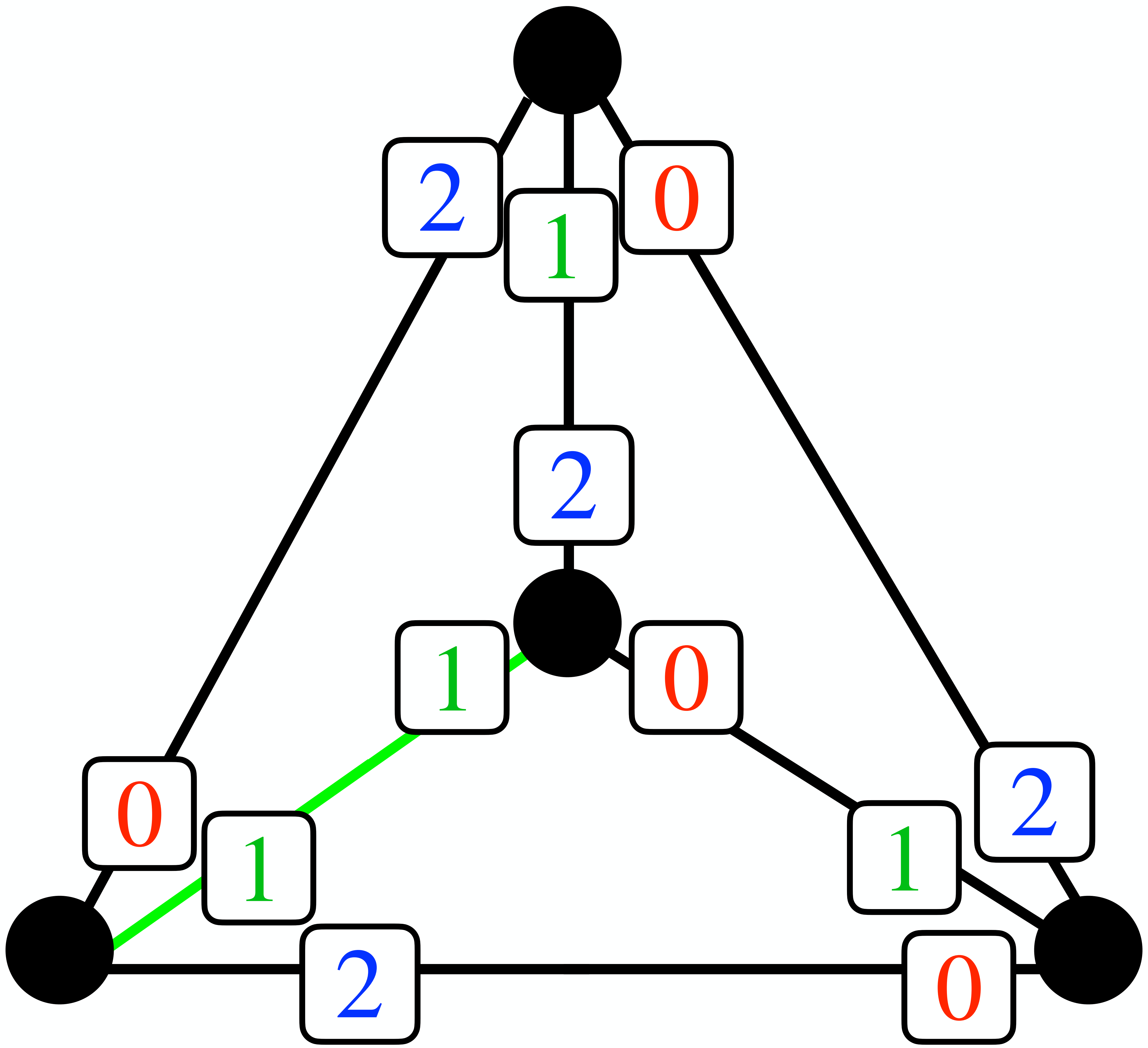
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



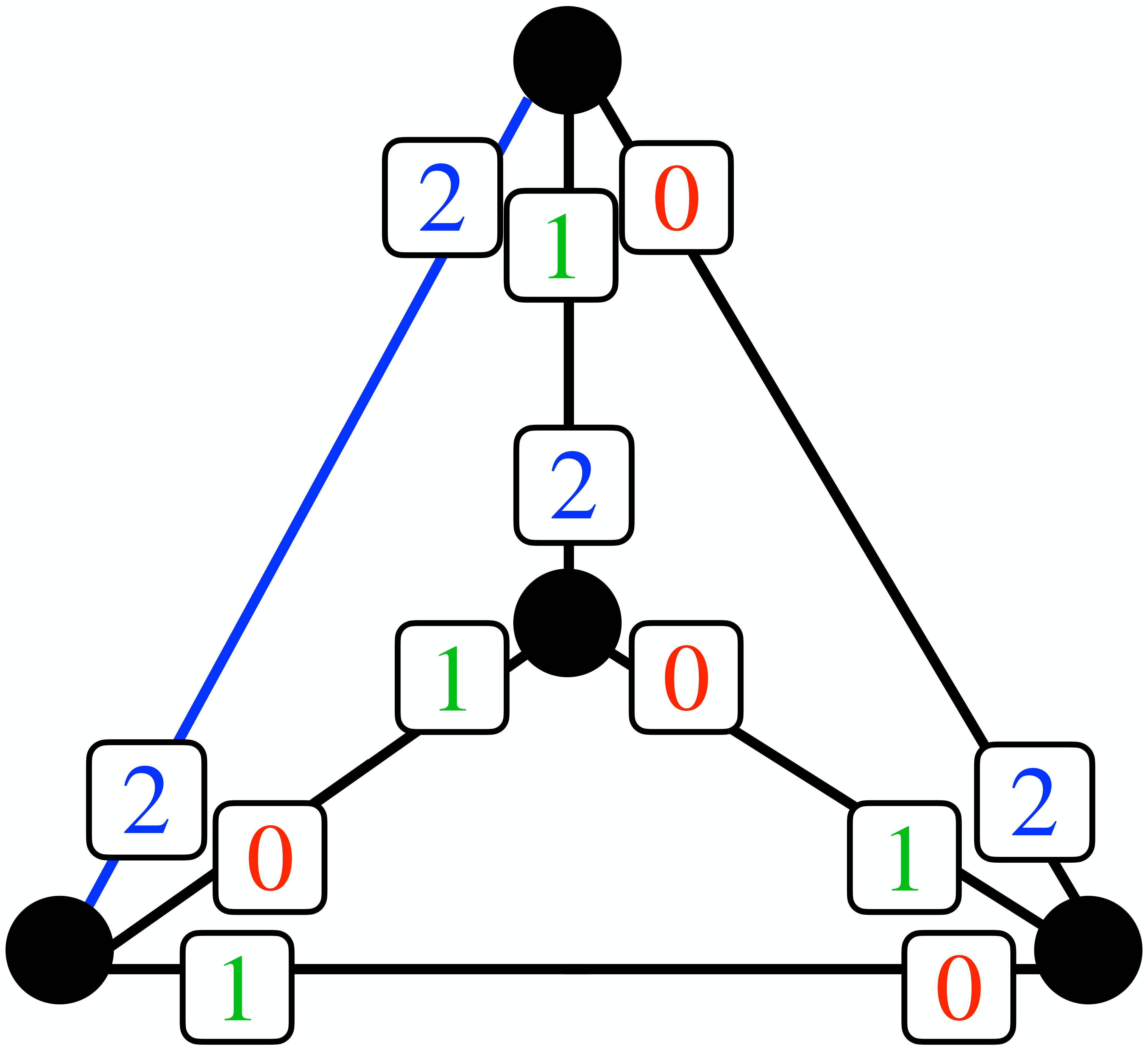
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



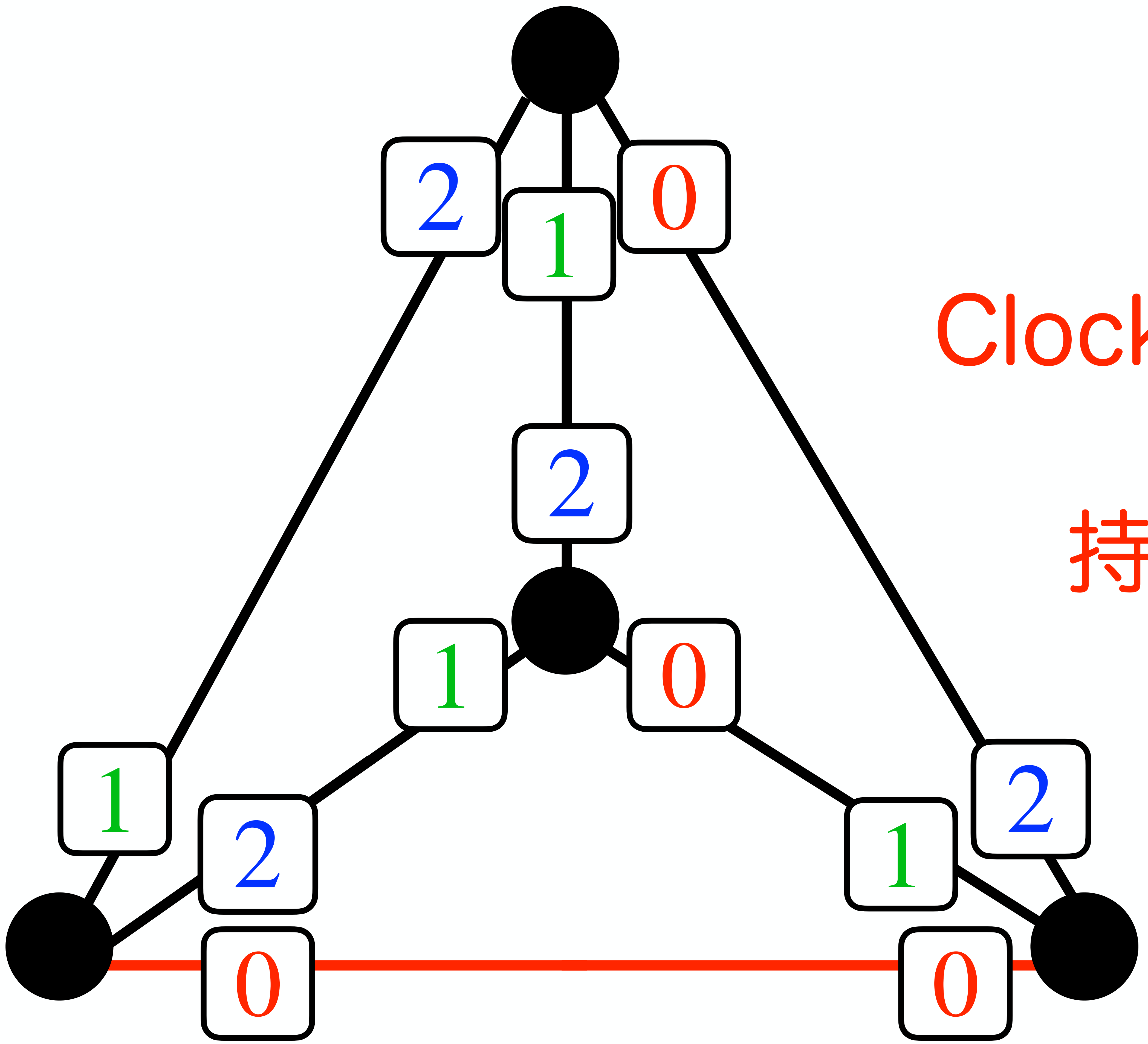
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



Clockwise 3-labelingを

持たない理由は？

Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.

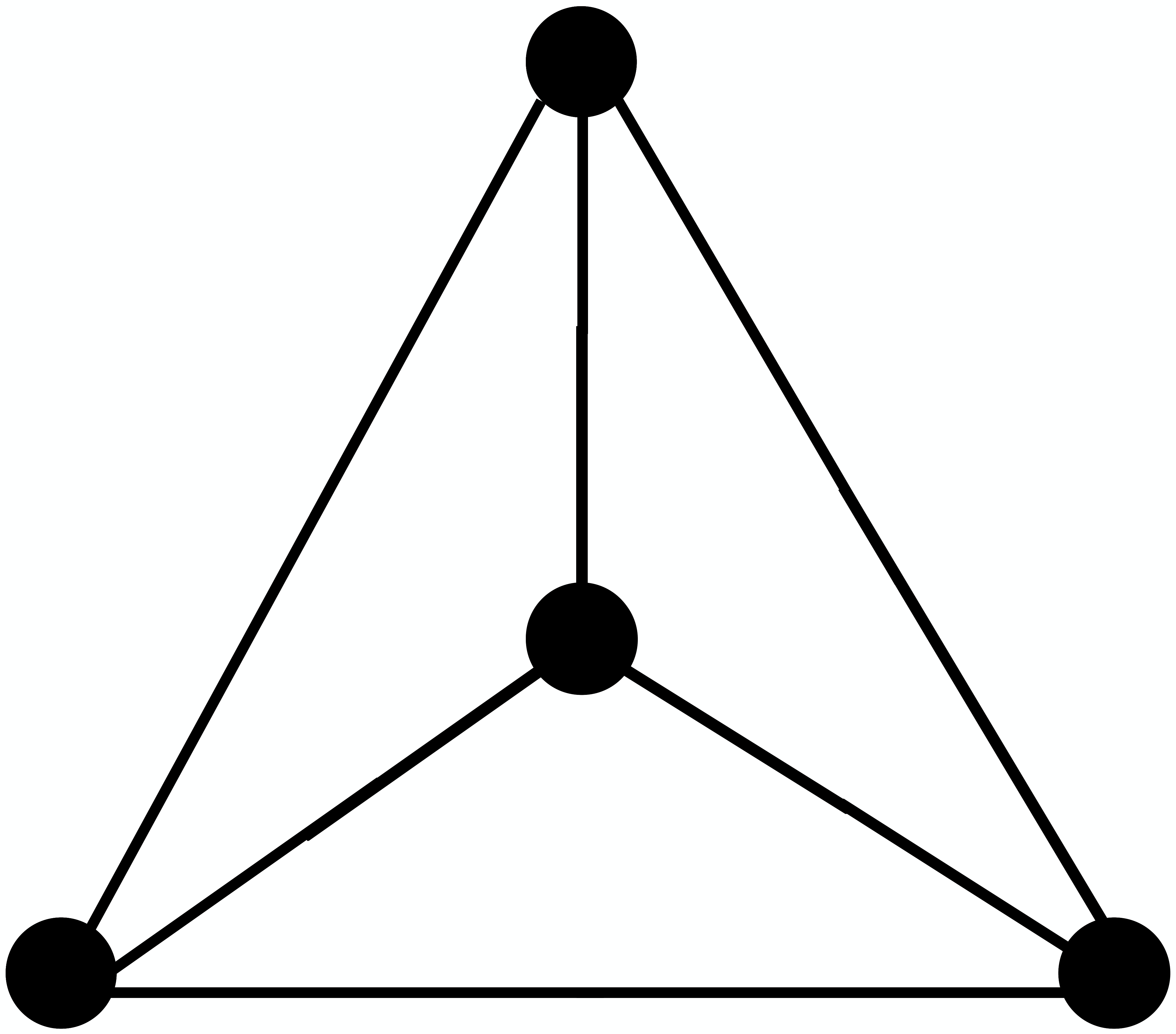
[証明の概略]　グラフGから，次のようにして

特別なグラフHを構成する.

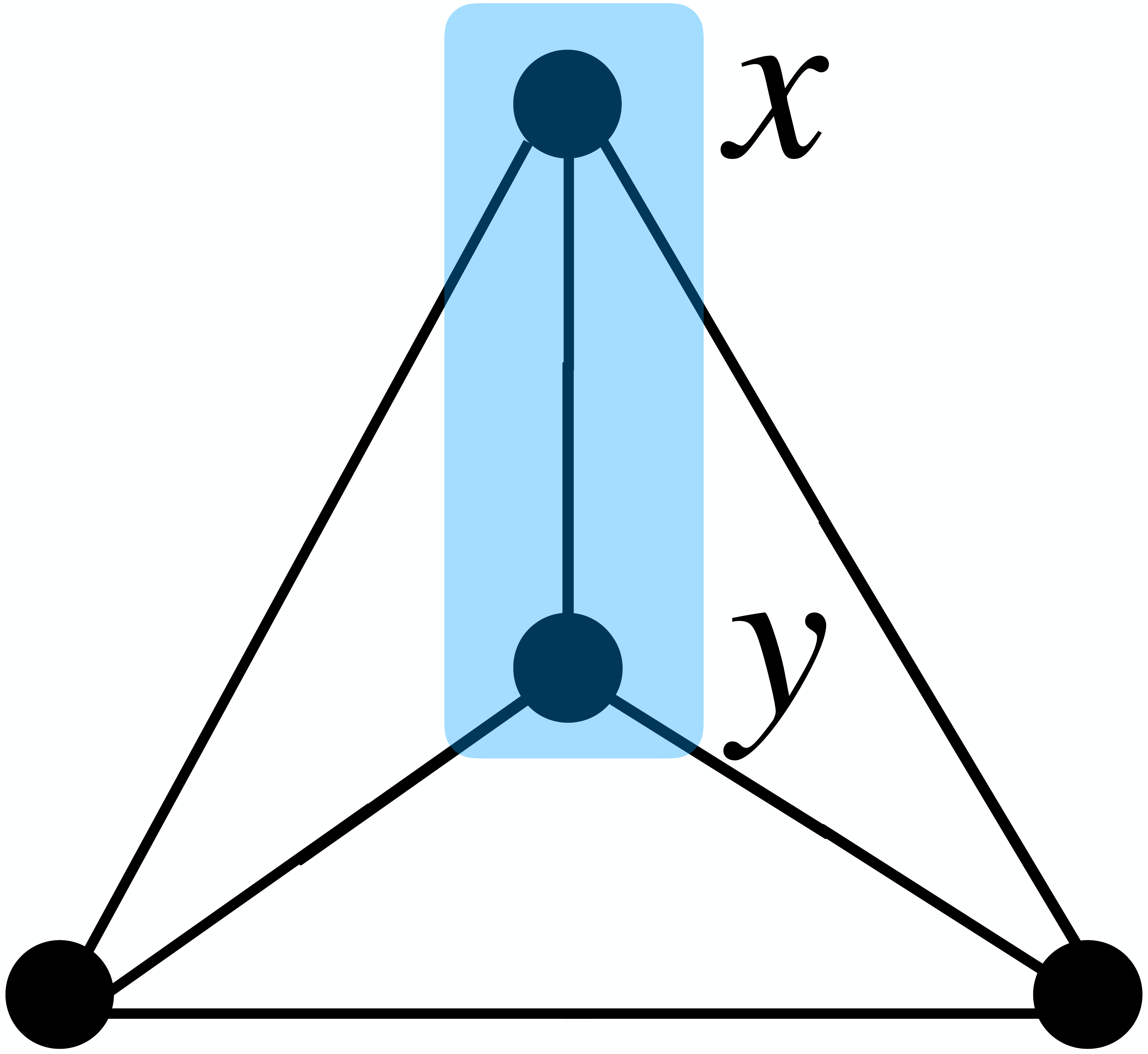
Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.

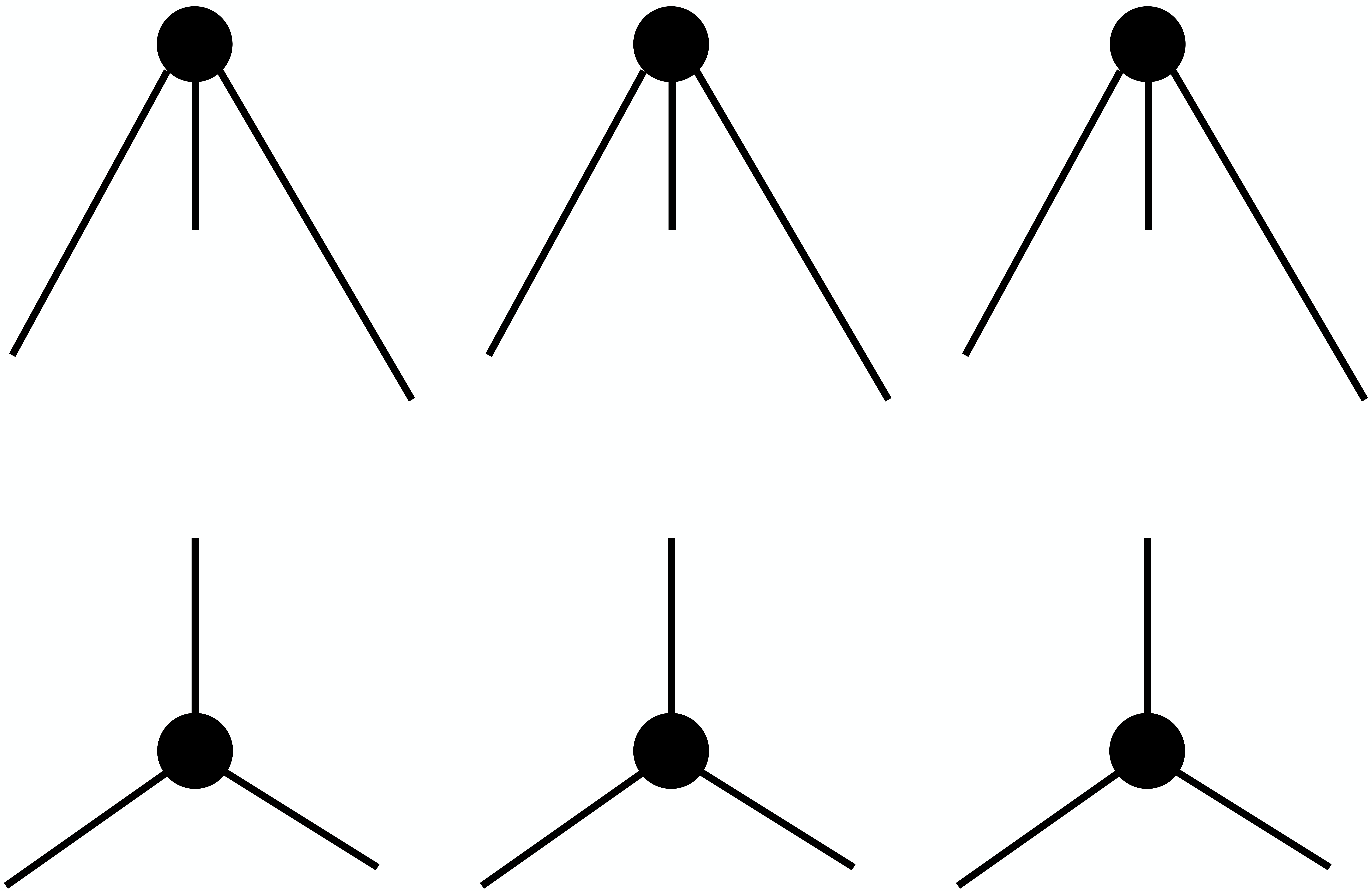
[証明の概略]



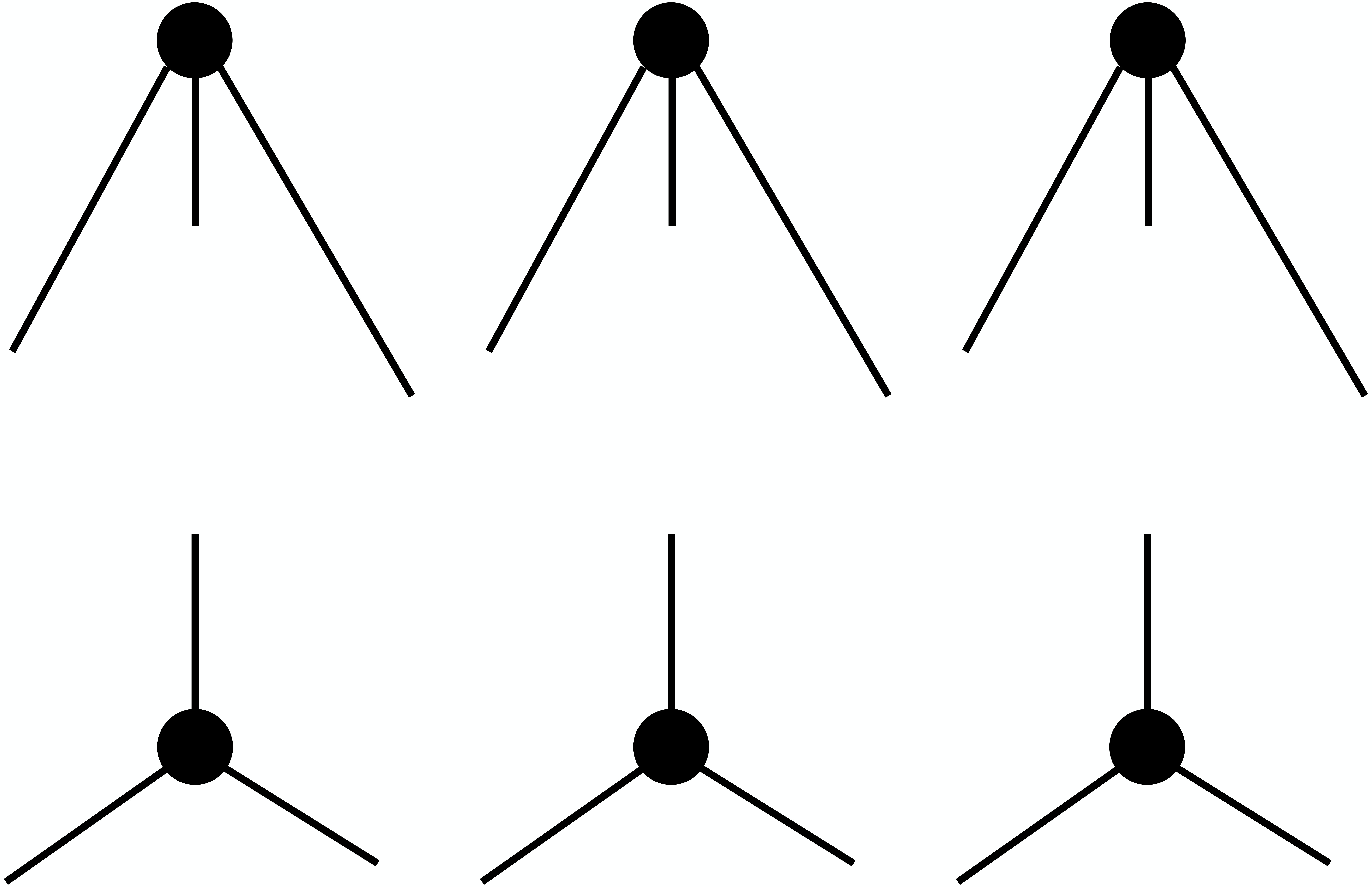
[証明の概略] 各頂点のコピーを３つずつ用意



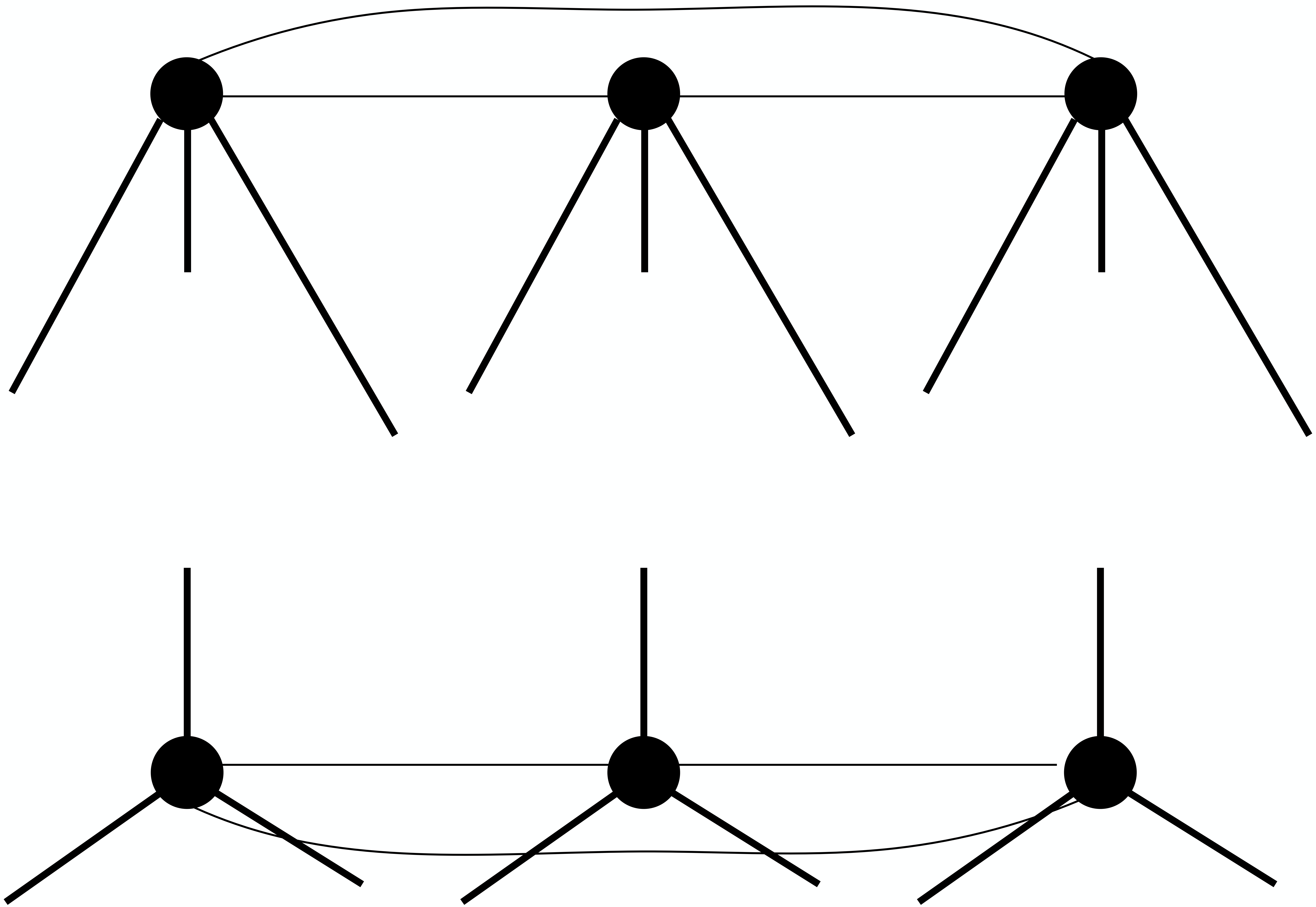
各頂点のコピーを３つずつ用意



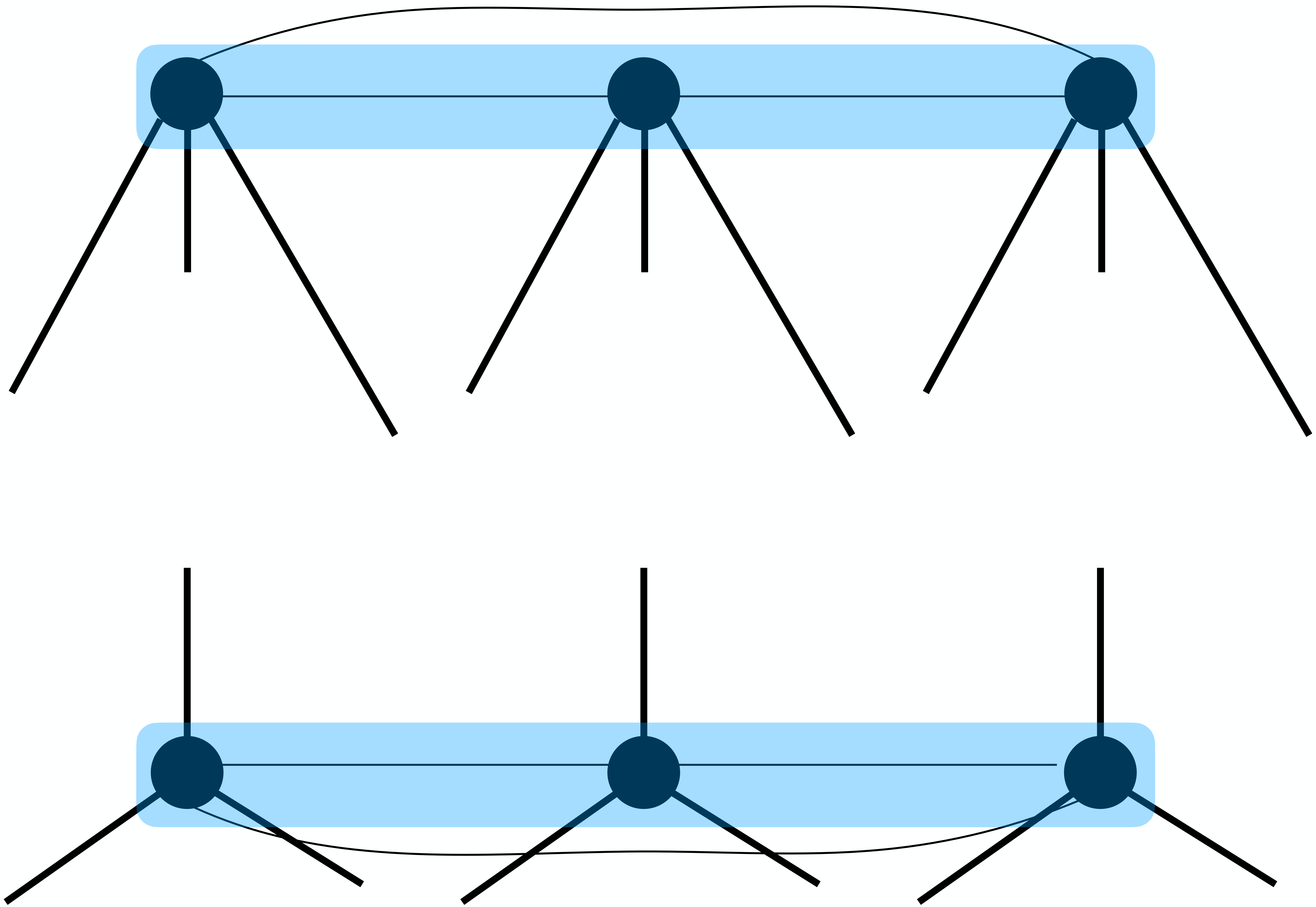
コピー同士を辺で結ぶ



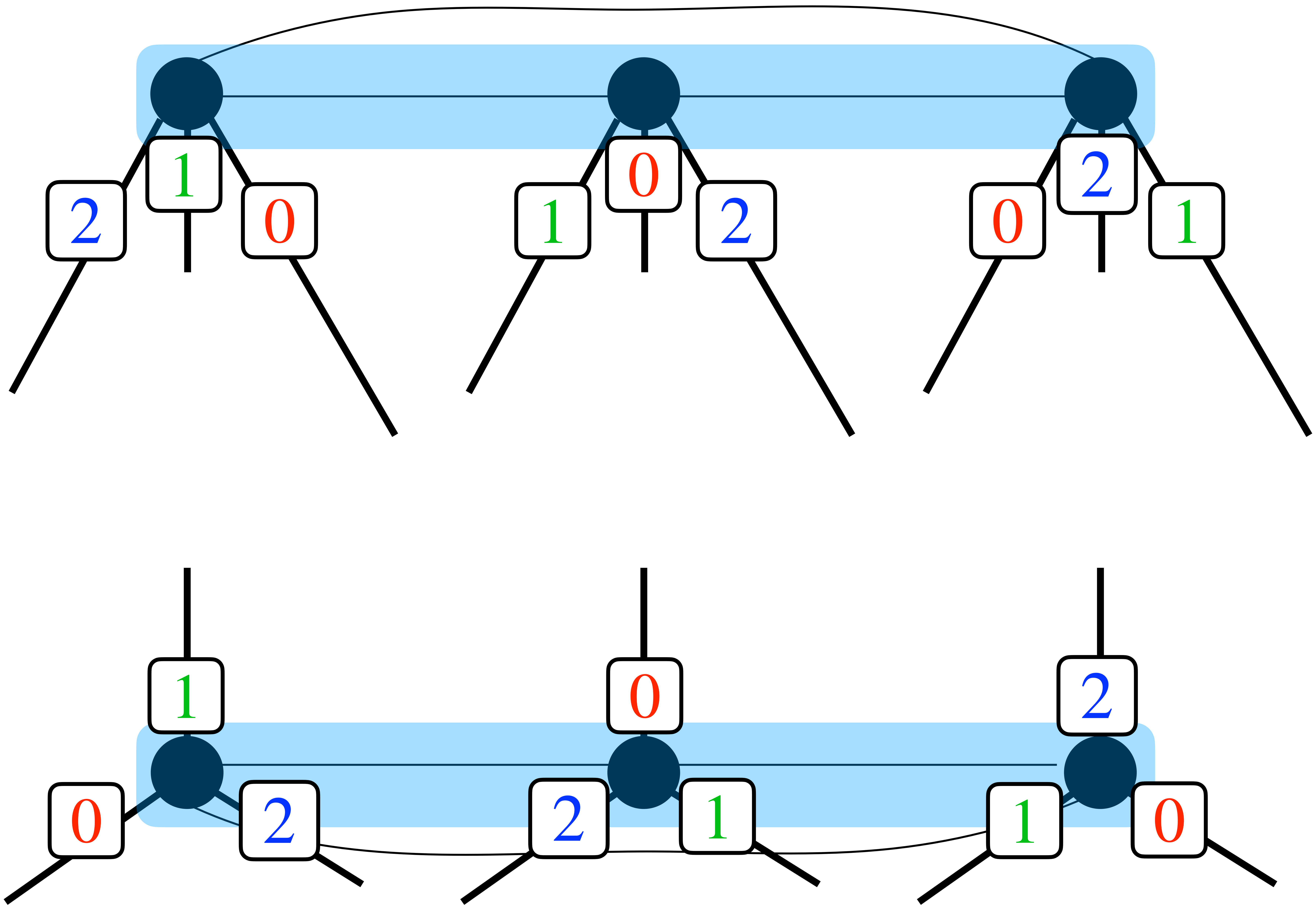
コピー同士を辺で結ぶ



コピー同士を辺で結ぶ

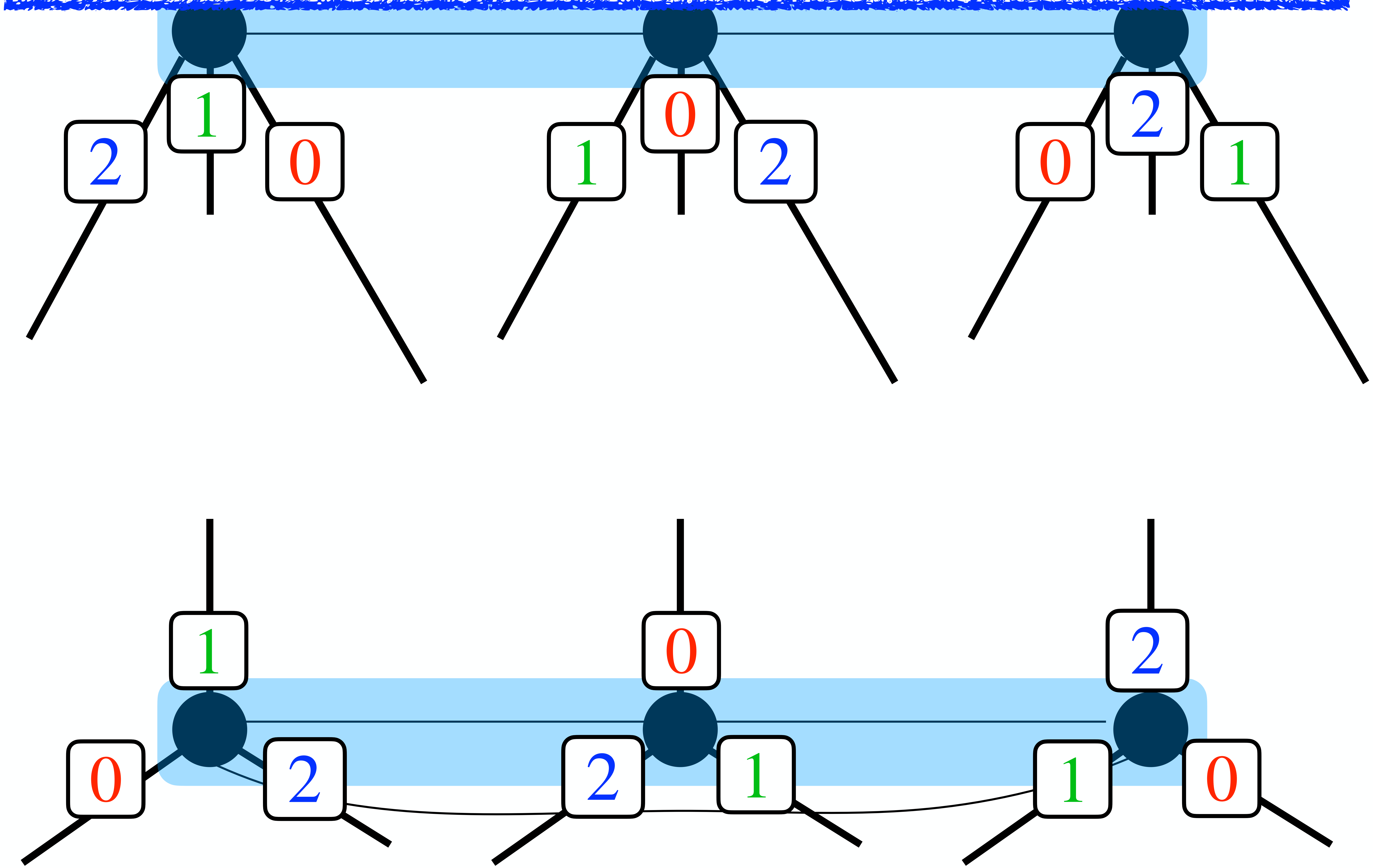


各点にラベルのパターンを割り振る

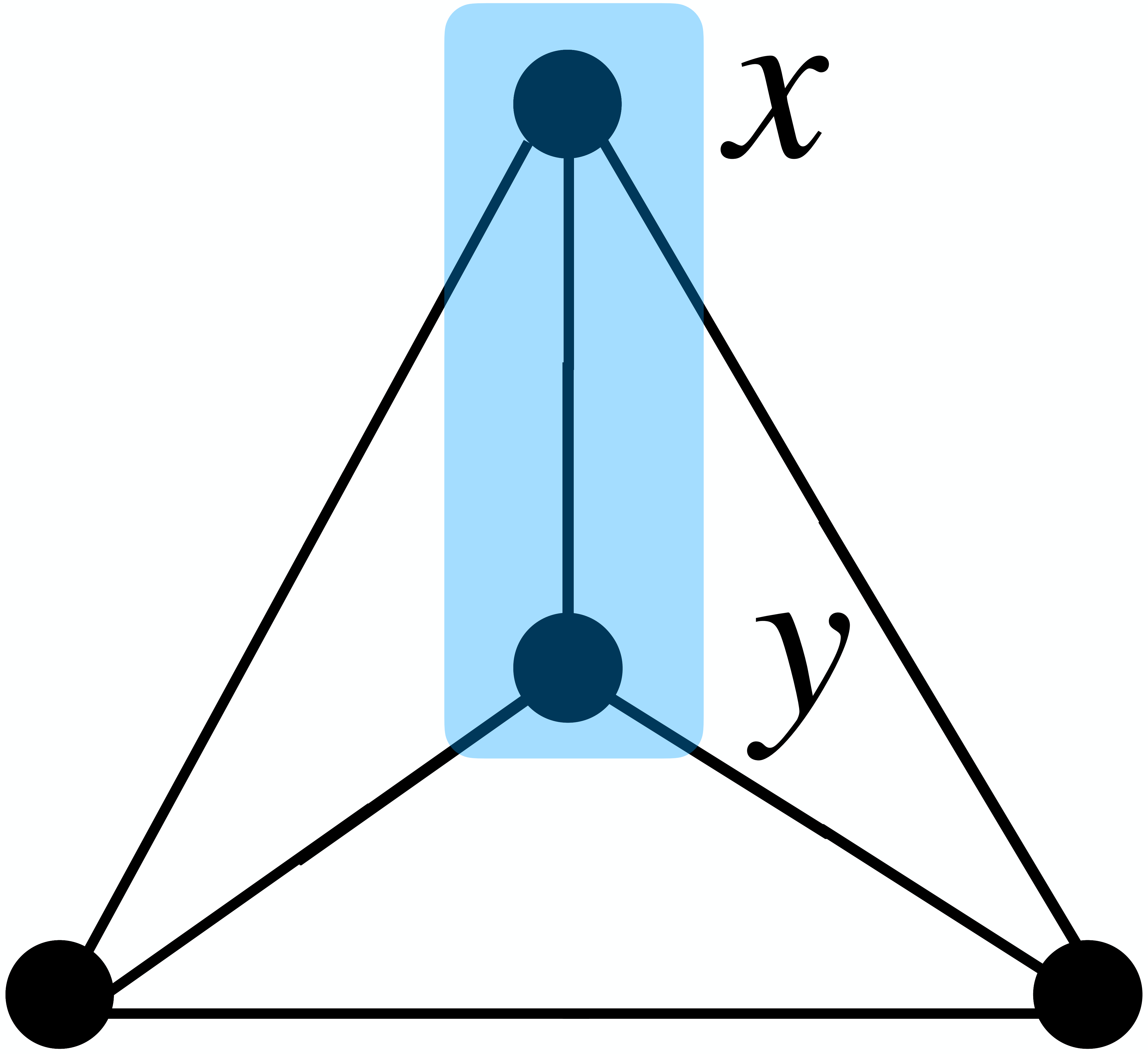


Gで隣接している頂点のコピーたちについて，

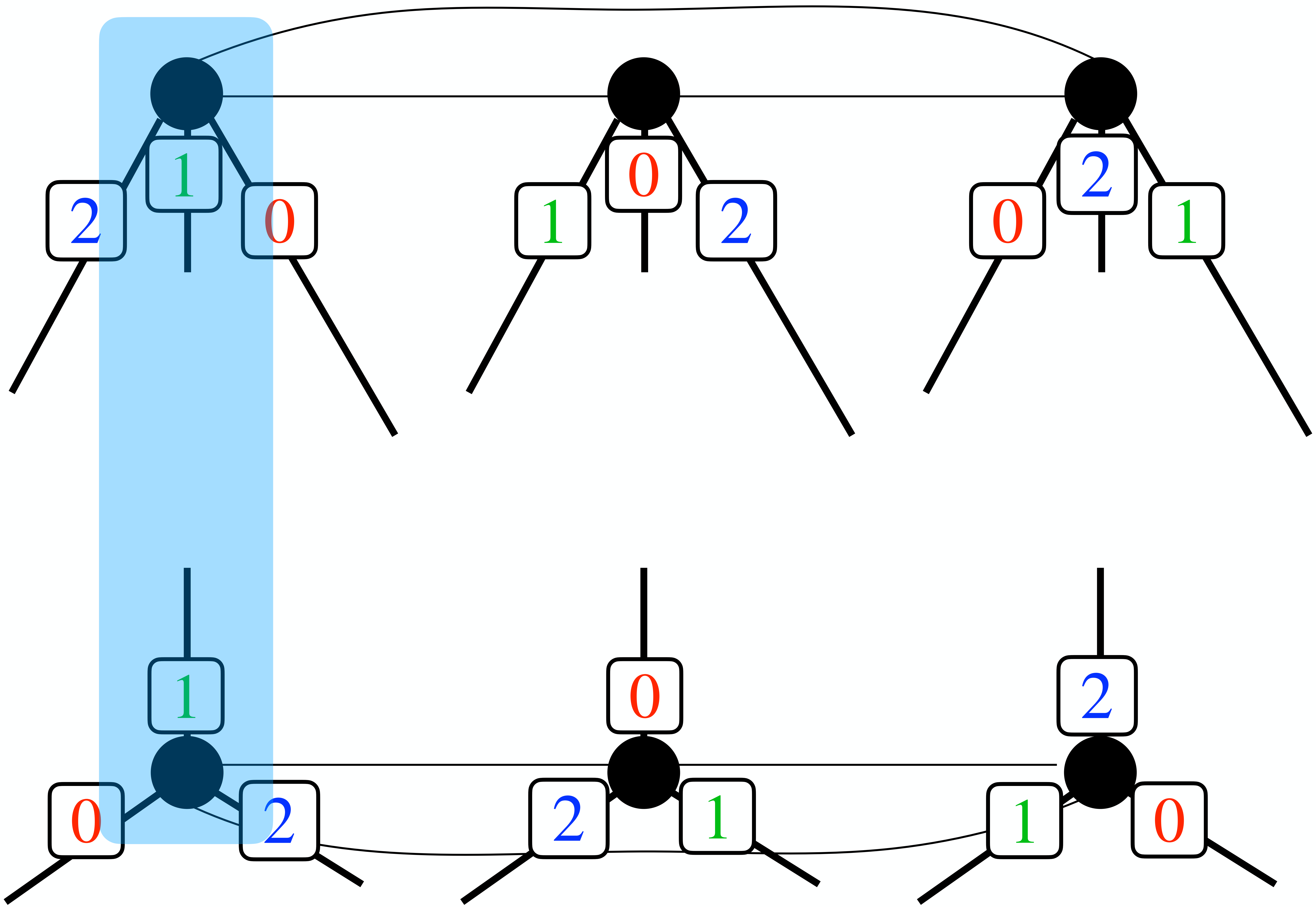
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



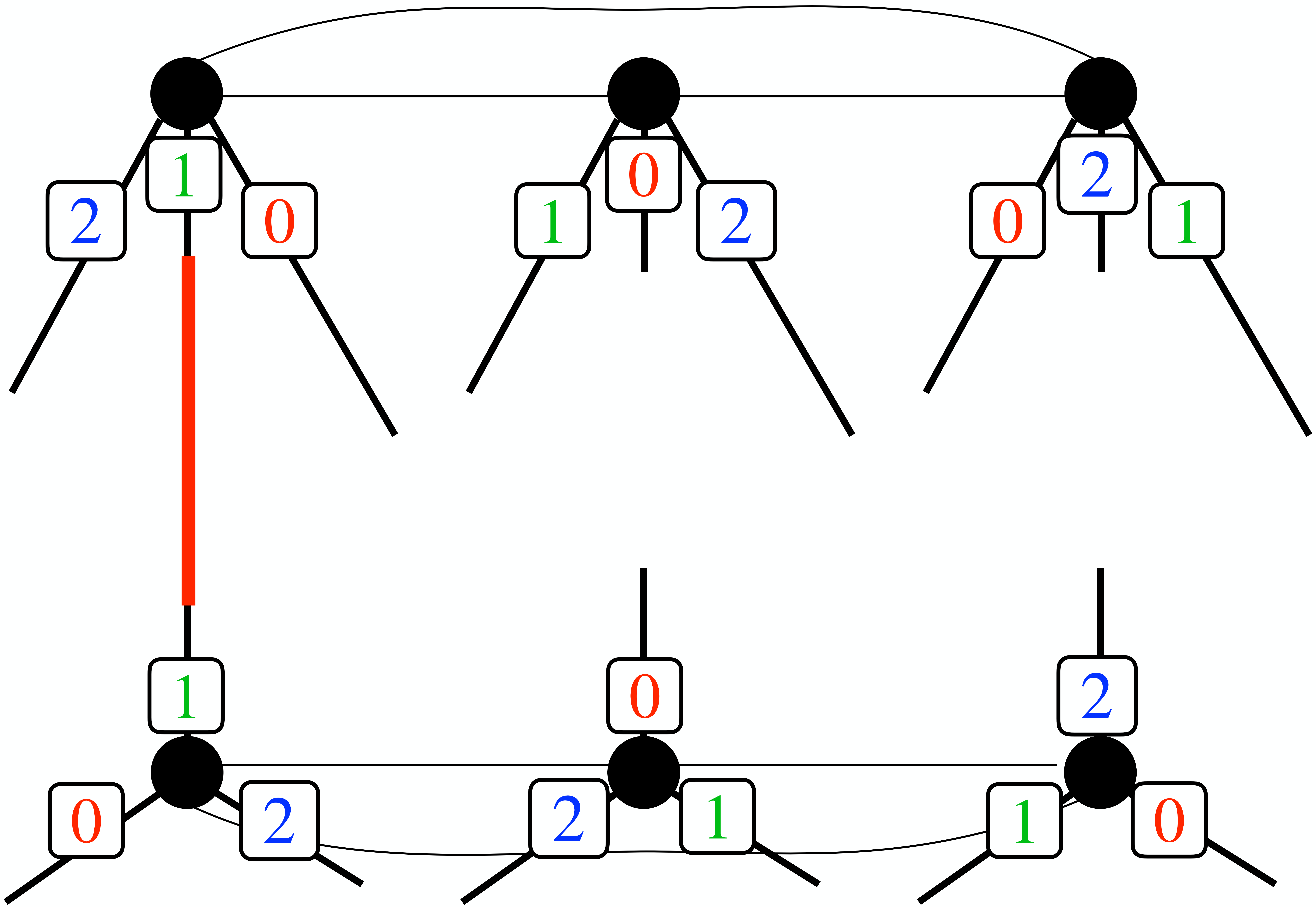
Gで隣接している頂点のコピーたちについて,
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



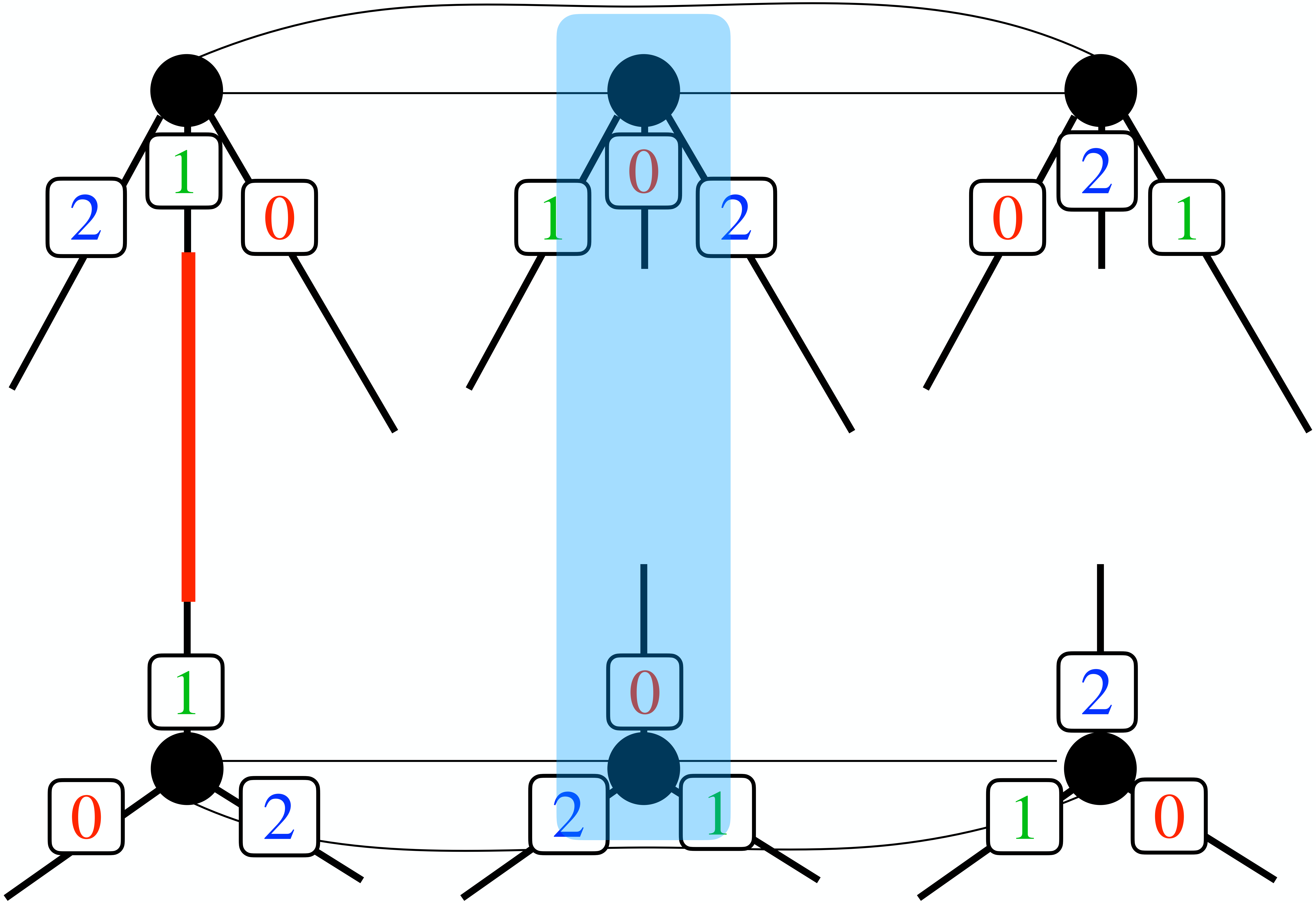
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



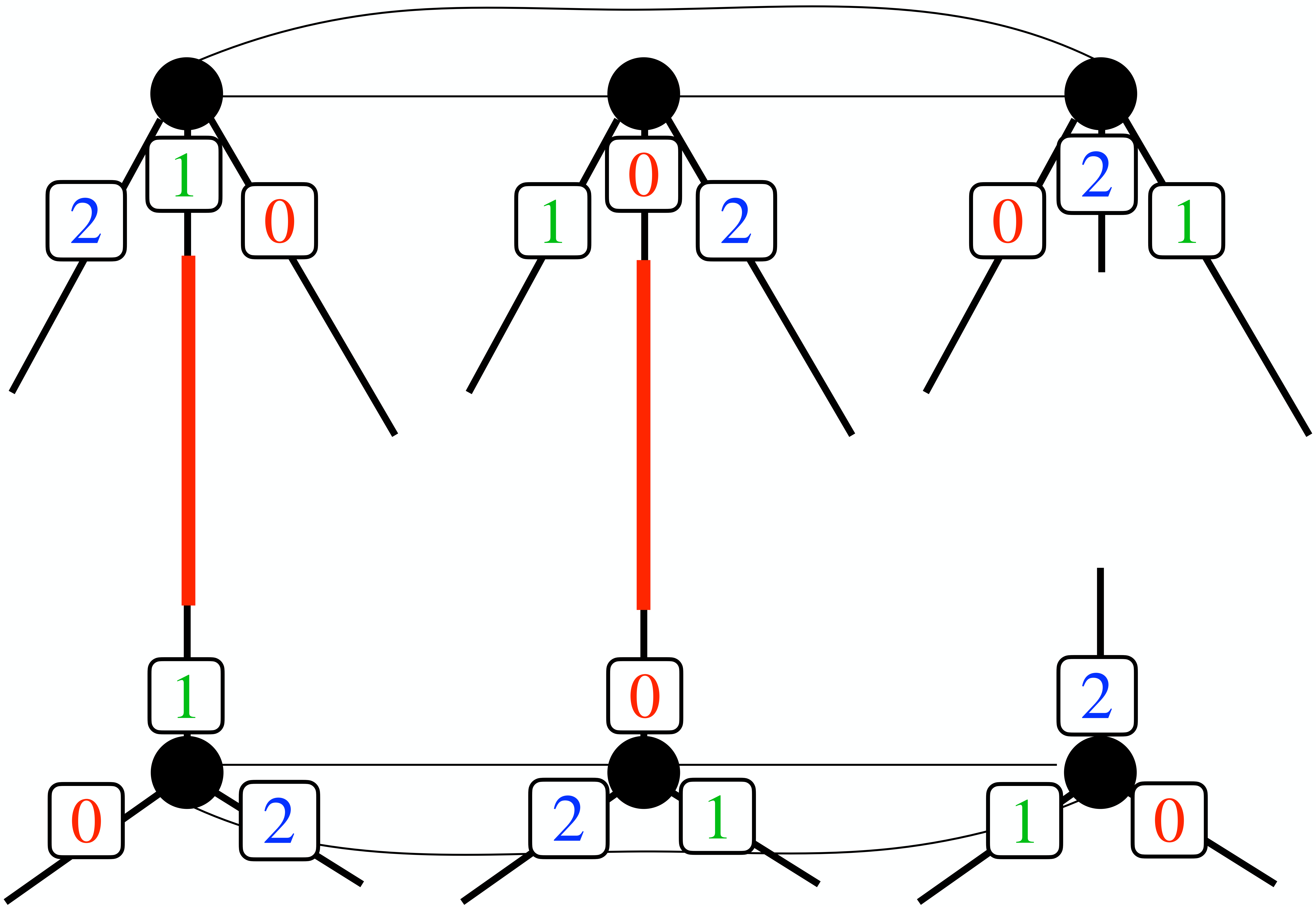
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



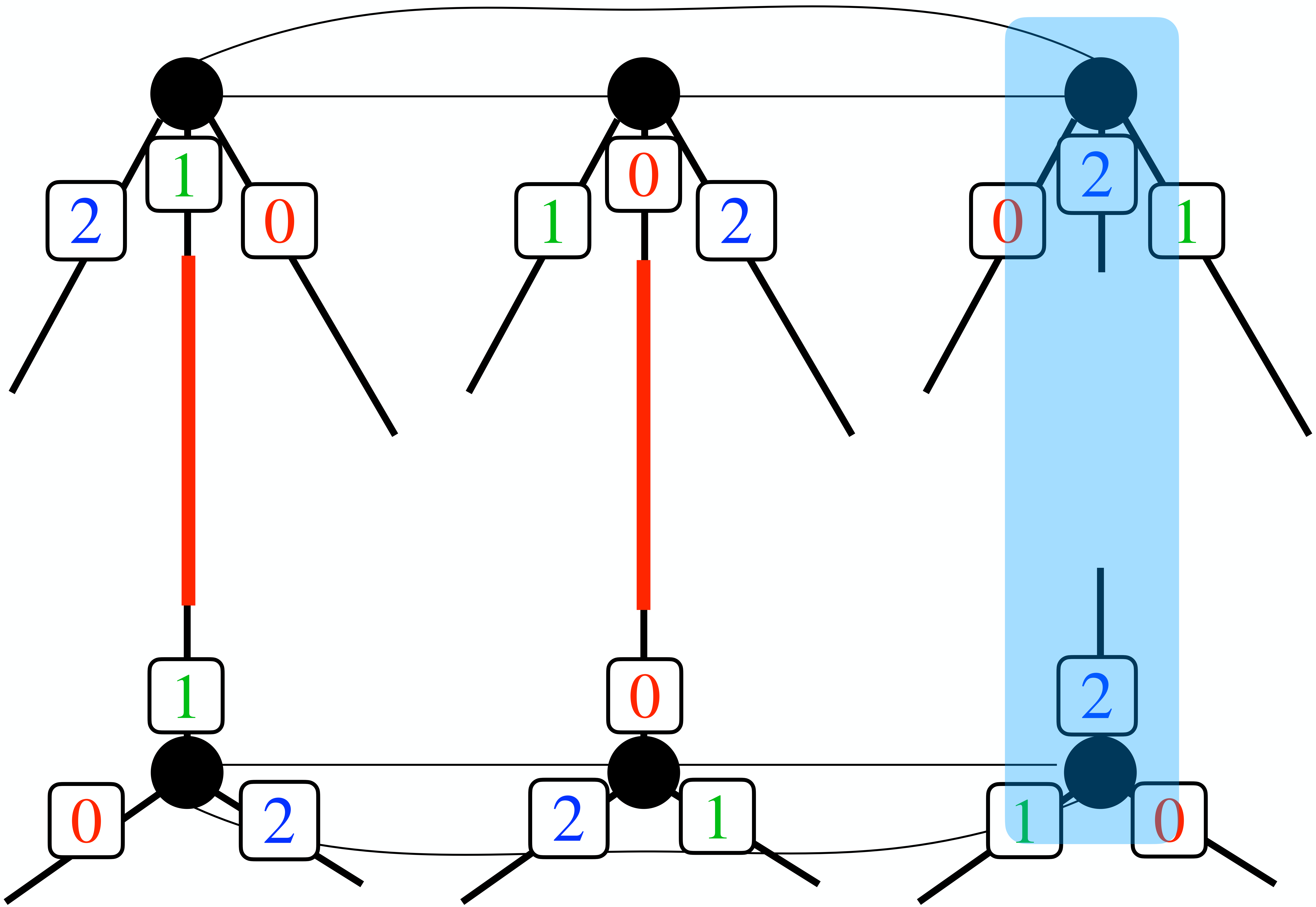
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



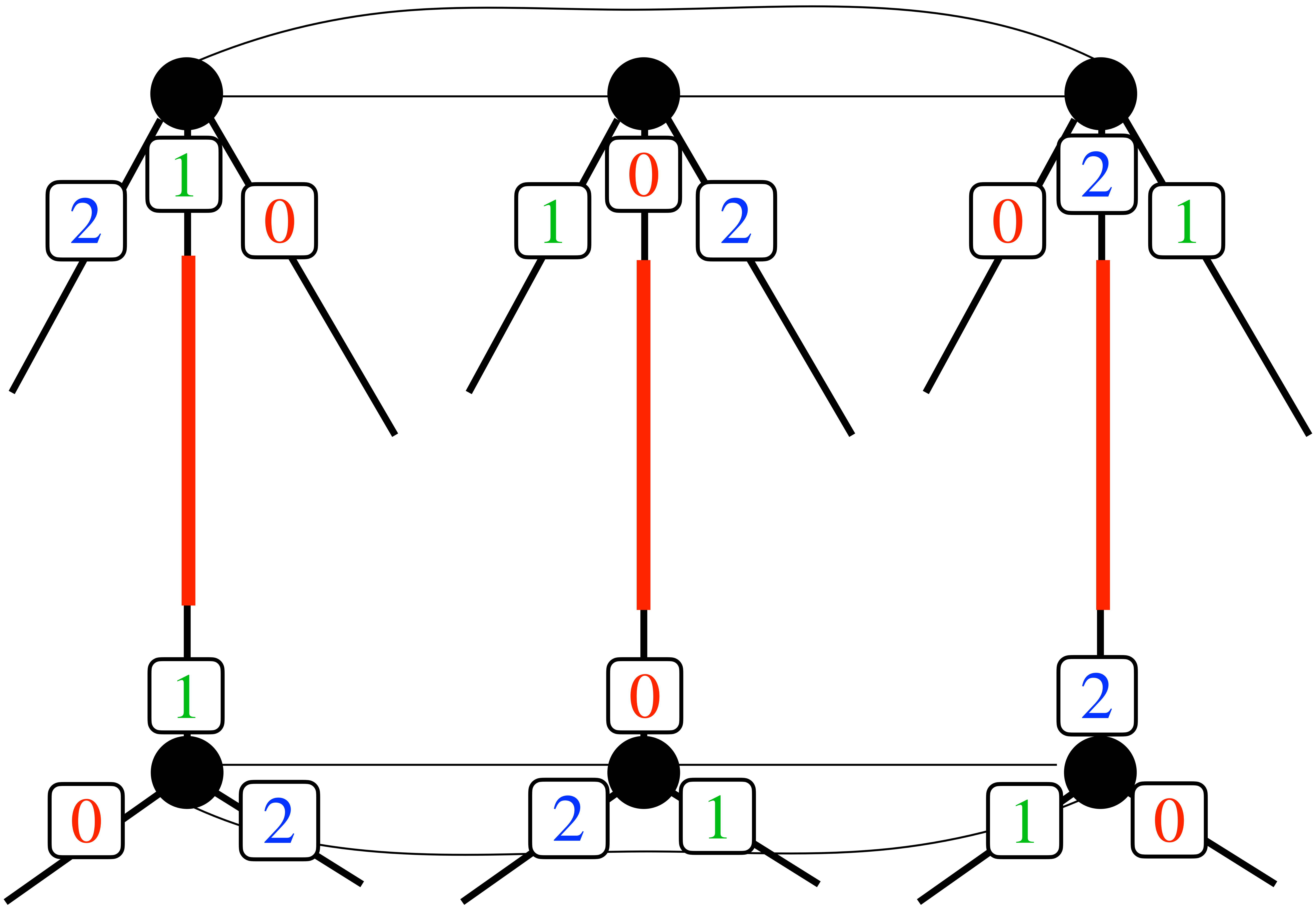
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



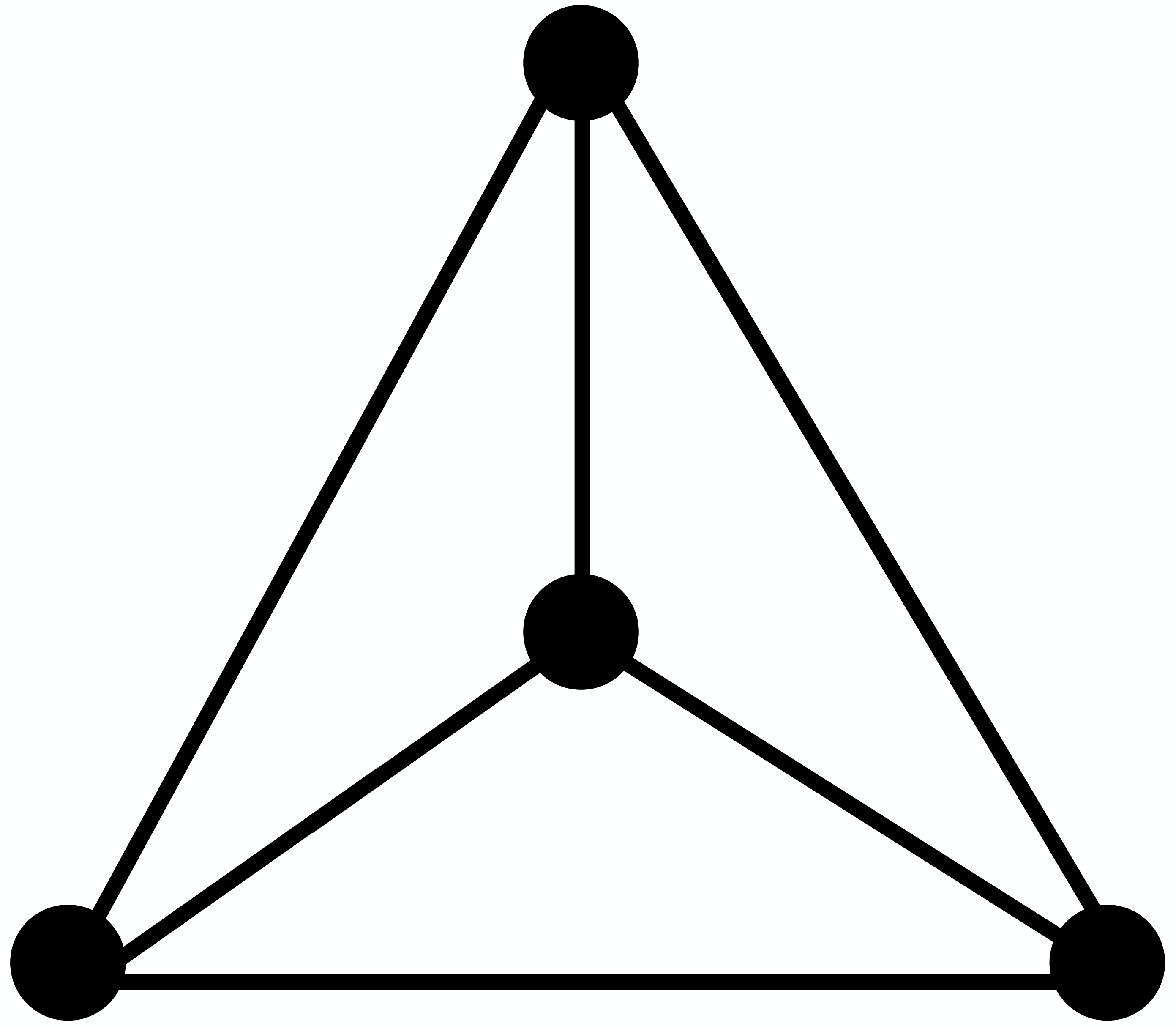
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



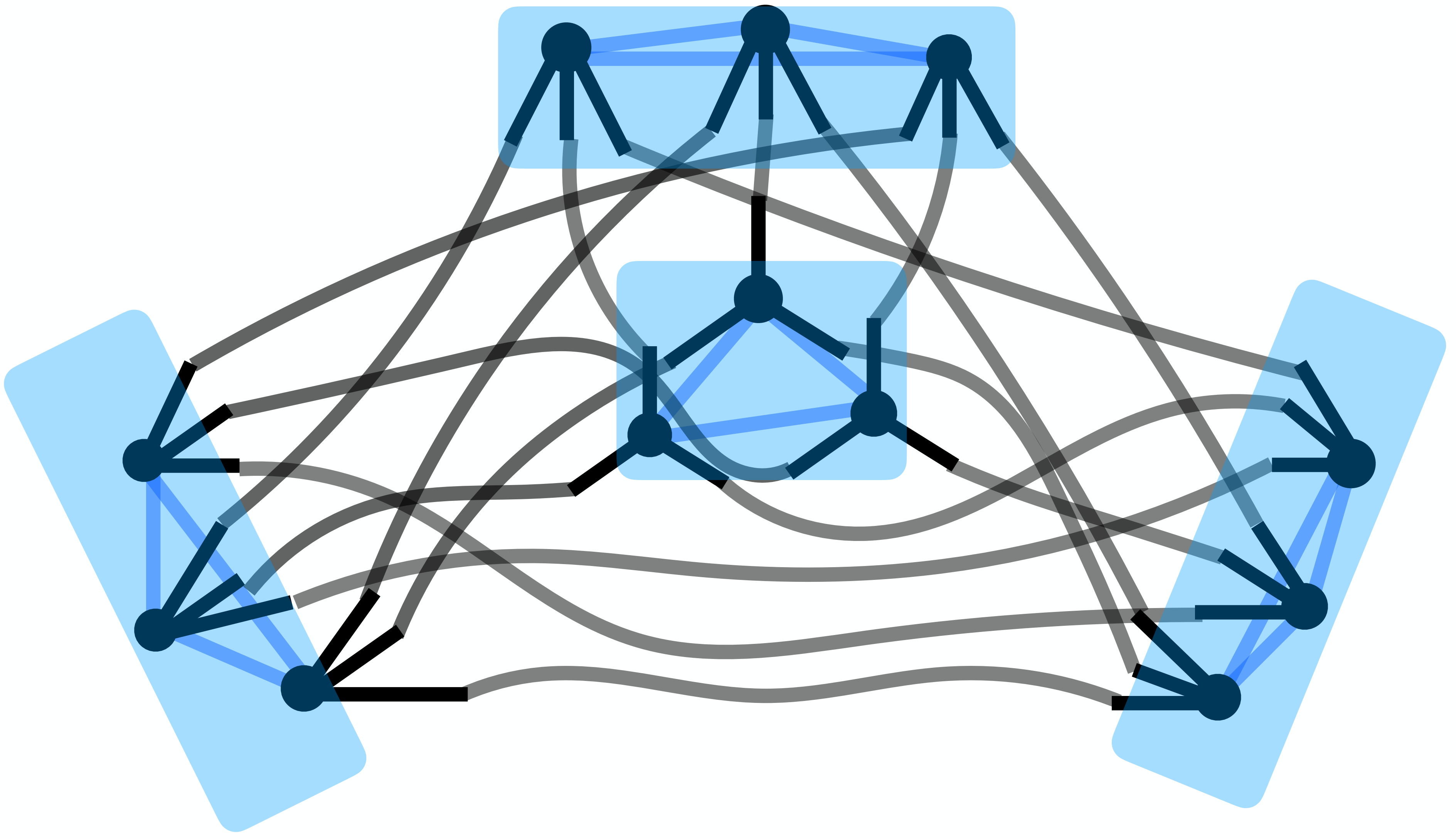
ラベルパターンが同じもの同士を辺で結ぶ



3-regular graph
G



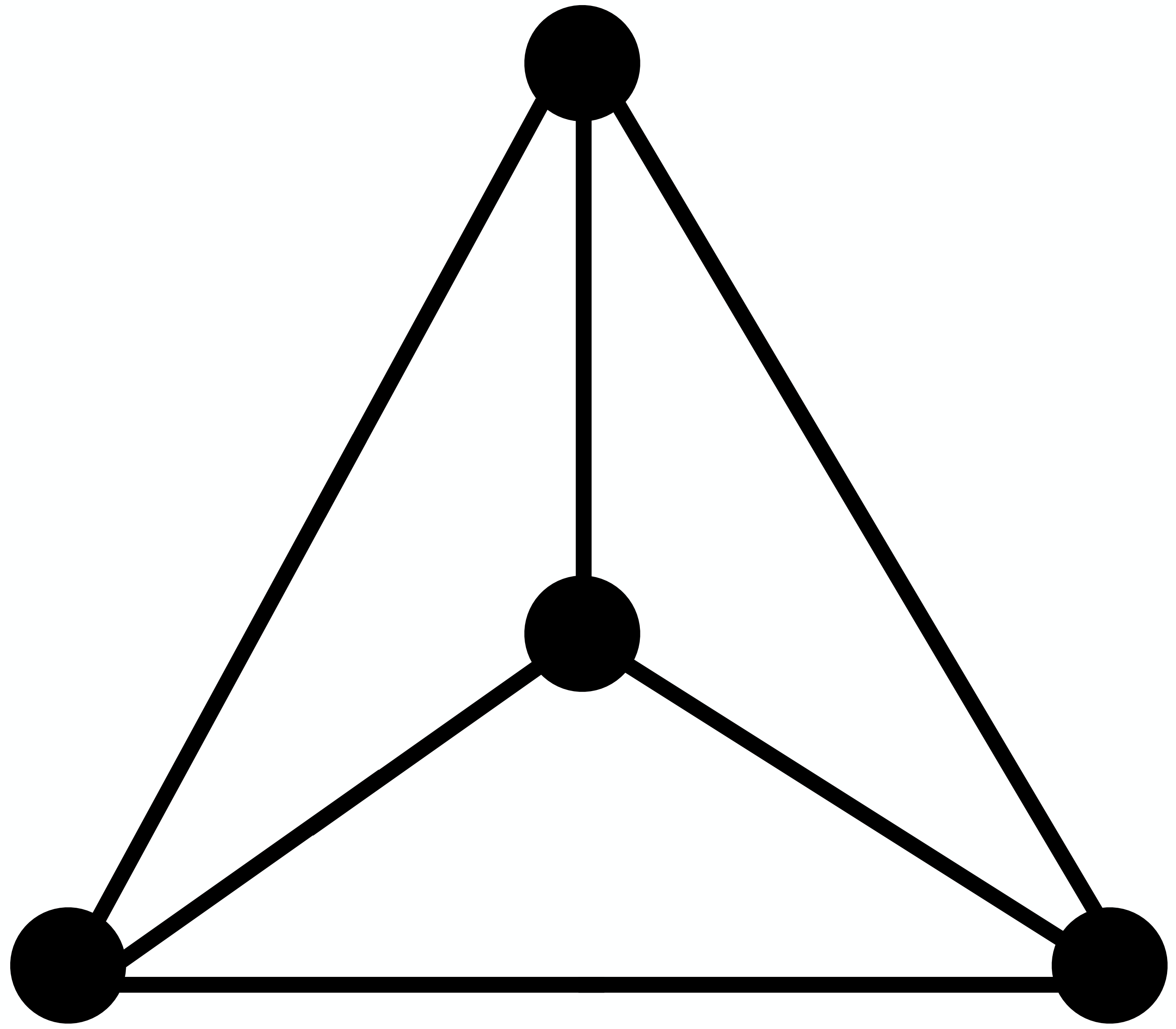
Gから得られた
グラフH



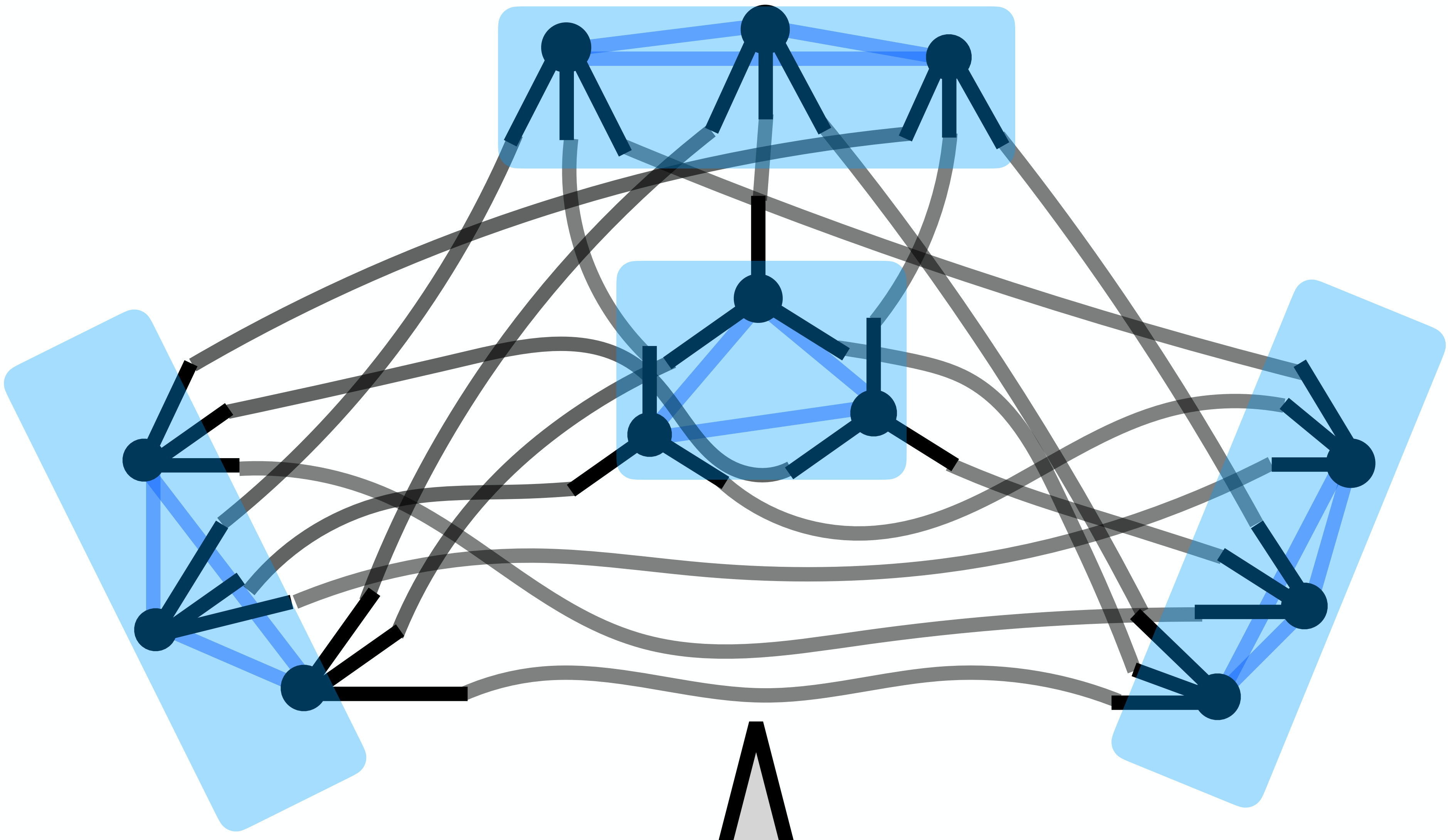
Clockwise 3-labelingはありますか？

3-regular graph

G



Gから得られたグラフH

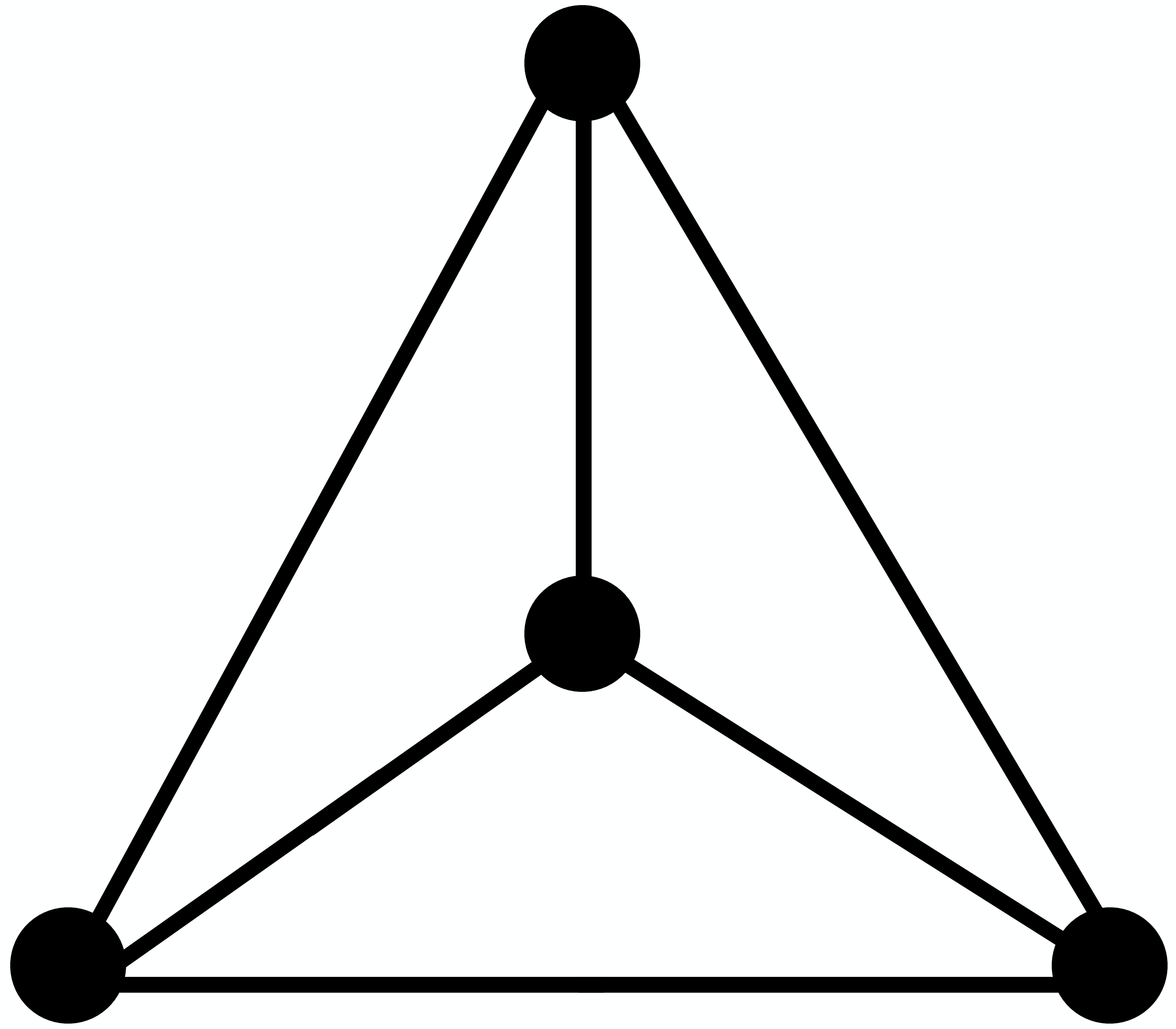


こちらでチェックします。

Clockwise 3-labelingはありますか？

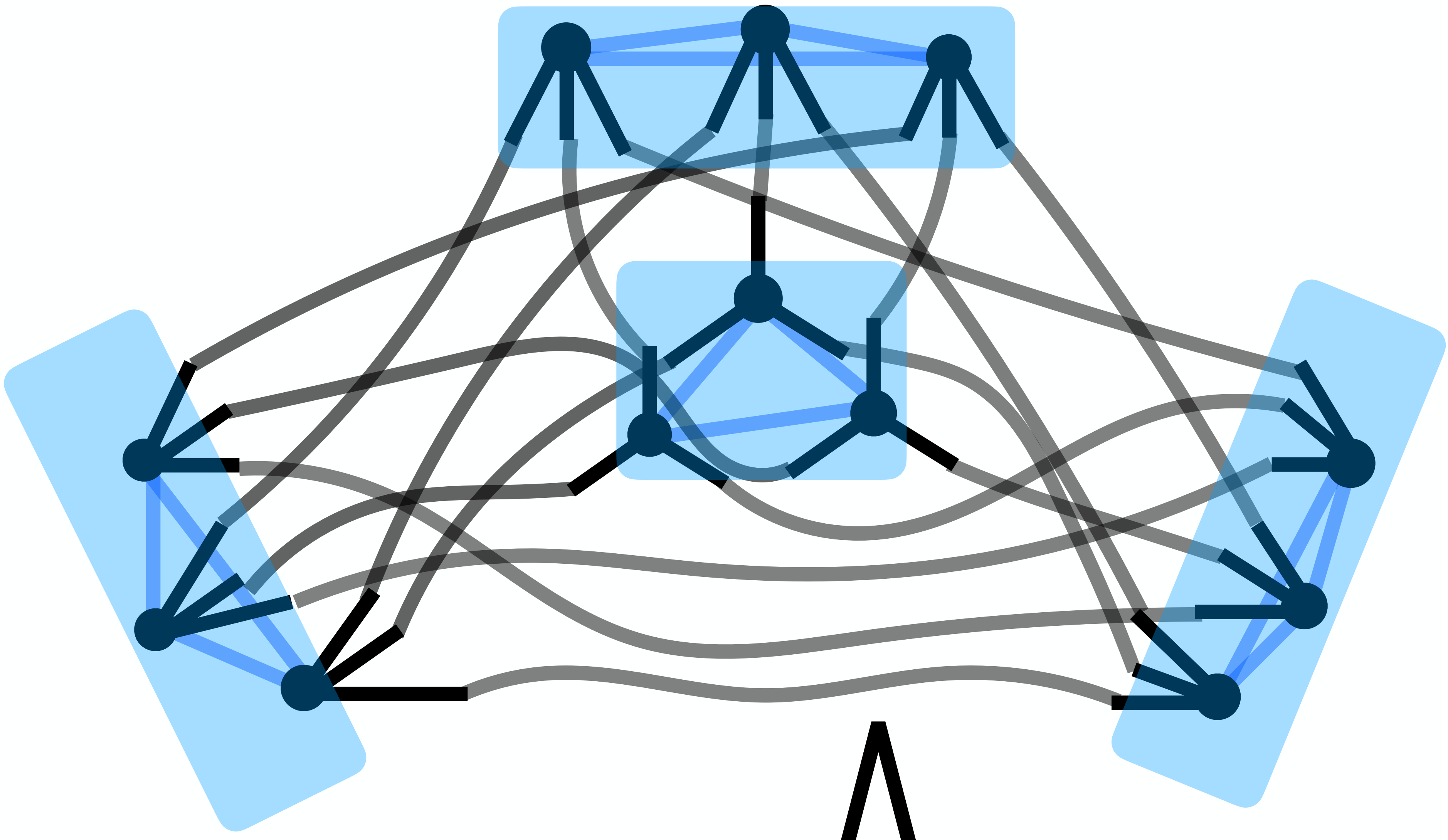
3-regular graph

G



Gから得られた

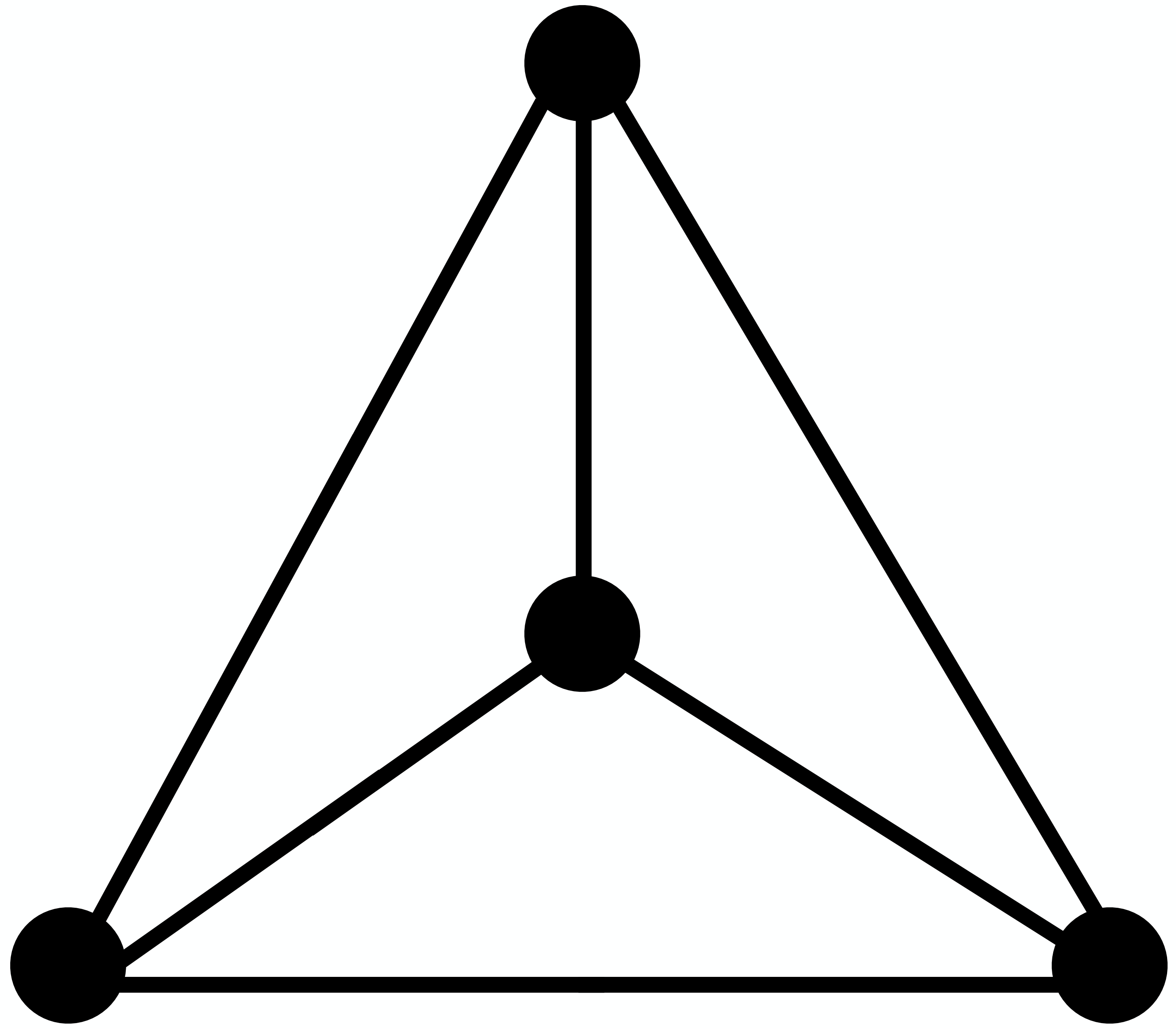
グラフH



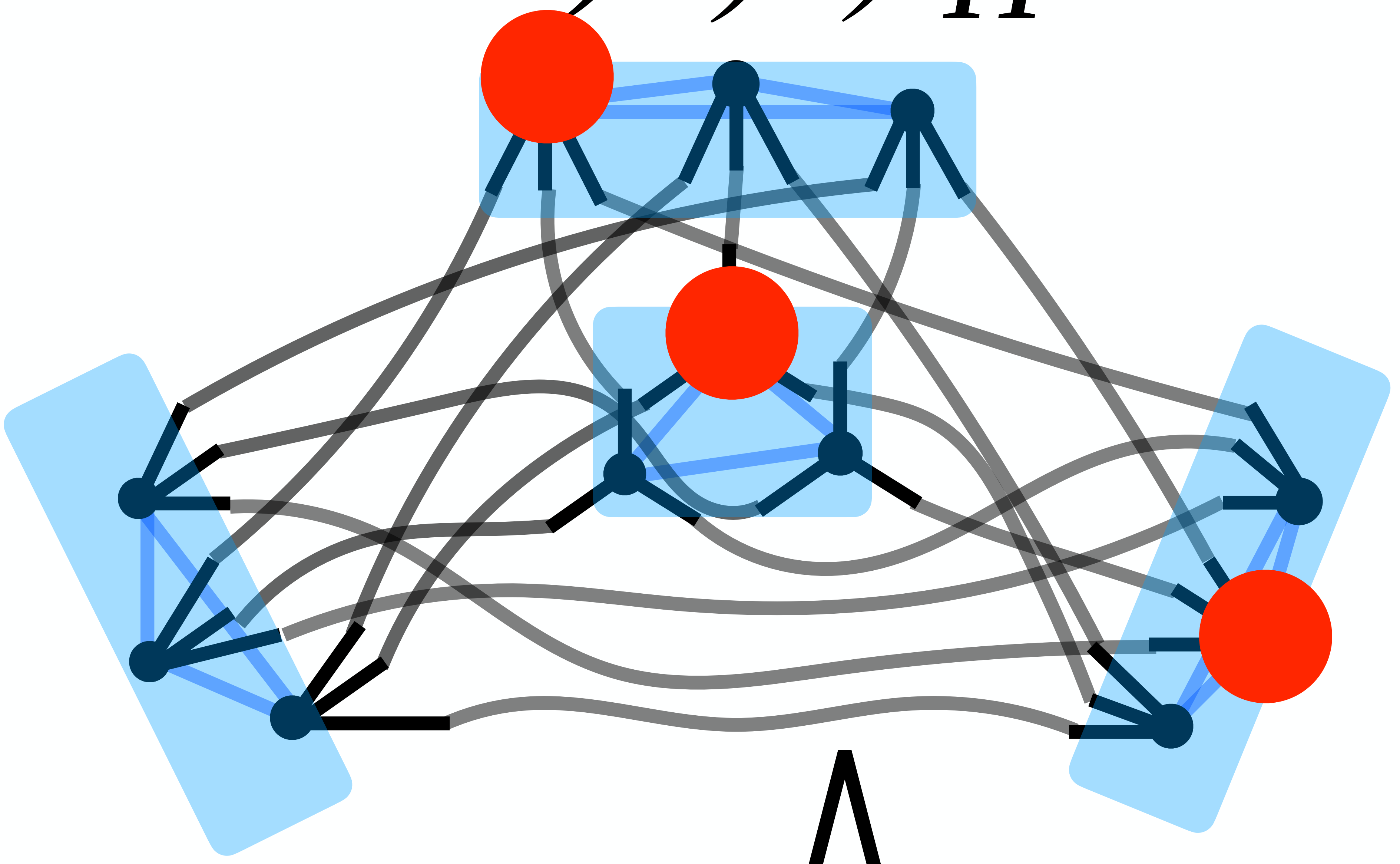
独立点集合で確認する。

Clockwise 3-labelingはありますか？

3-regular graph
G



Gから得られたグラフH

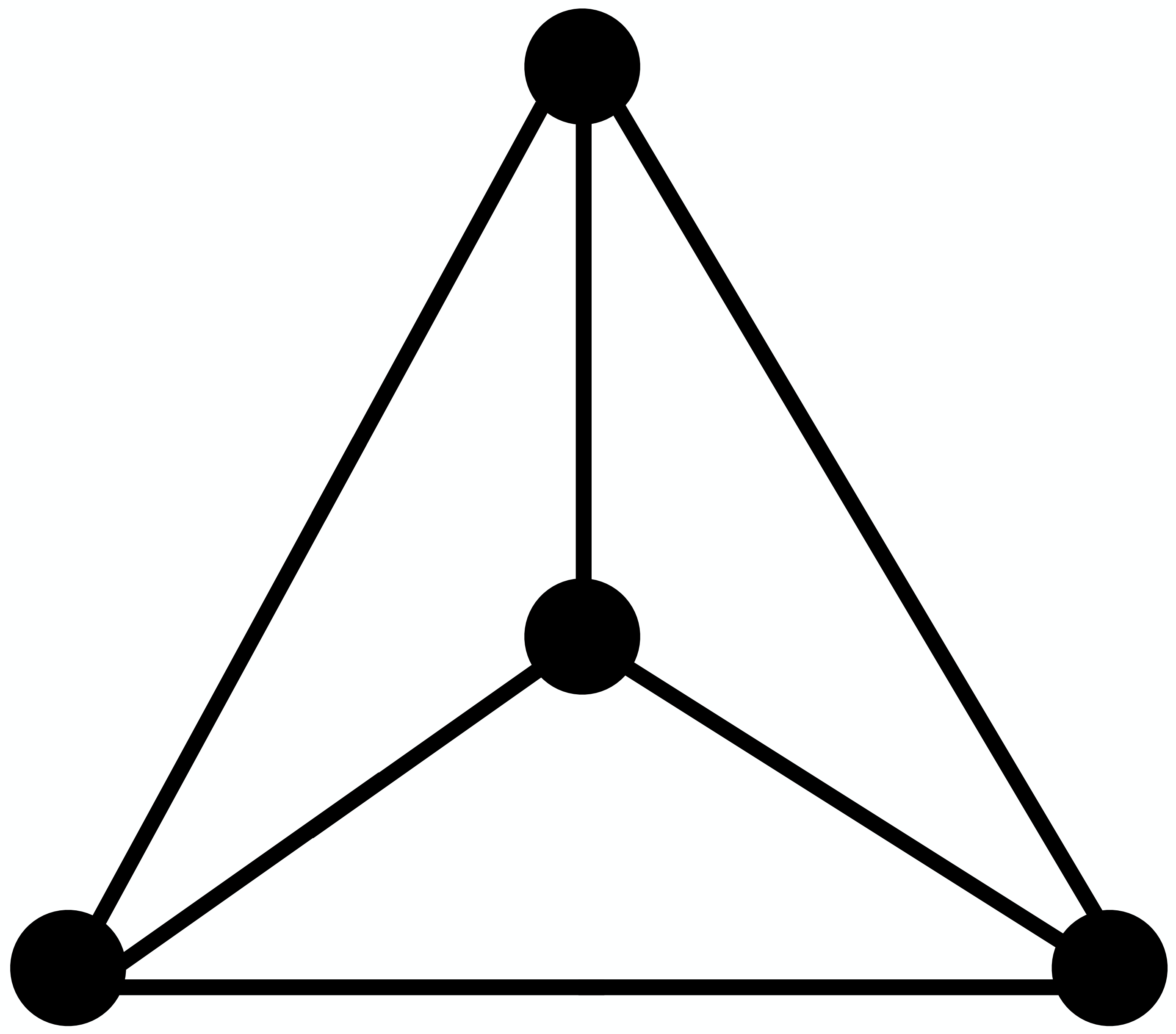


独立点集合で確認する。

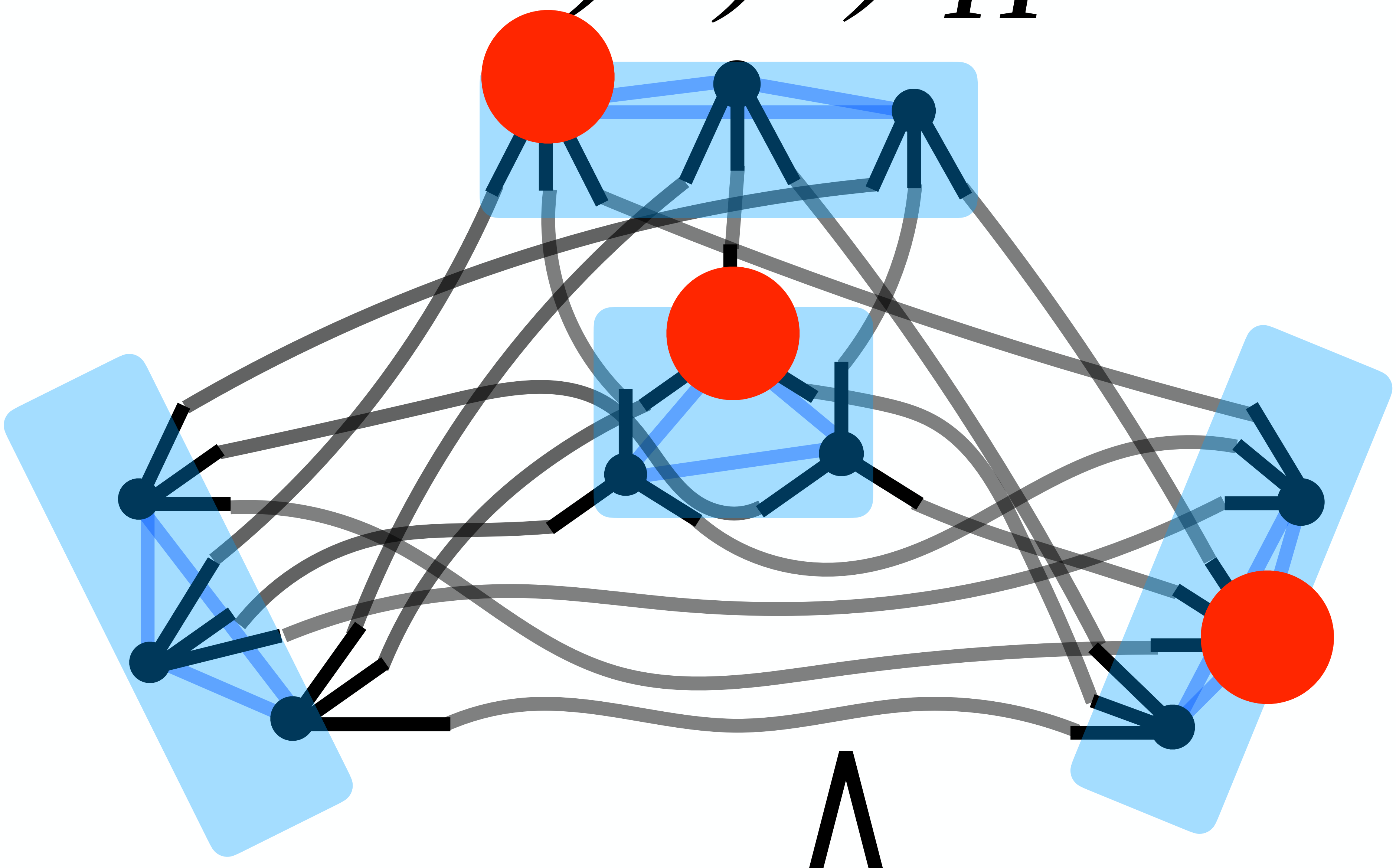
独立点集合が何を意味しているか？

3-regular graph

G

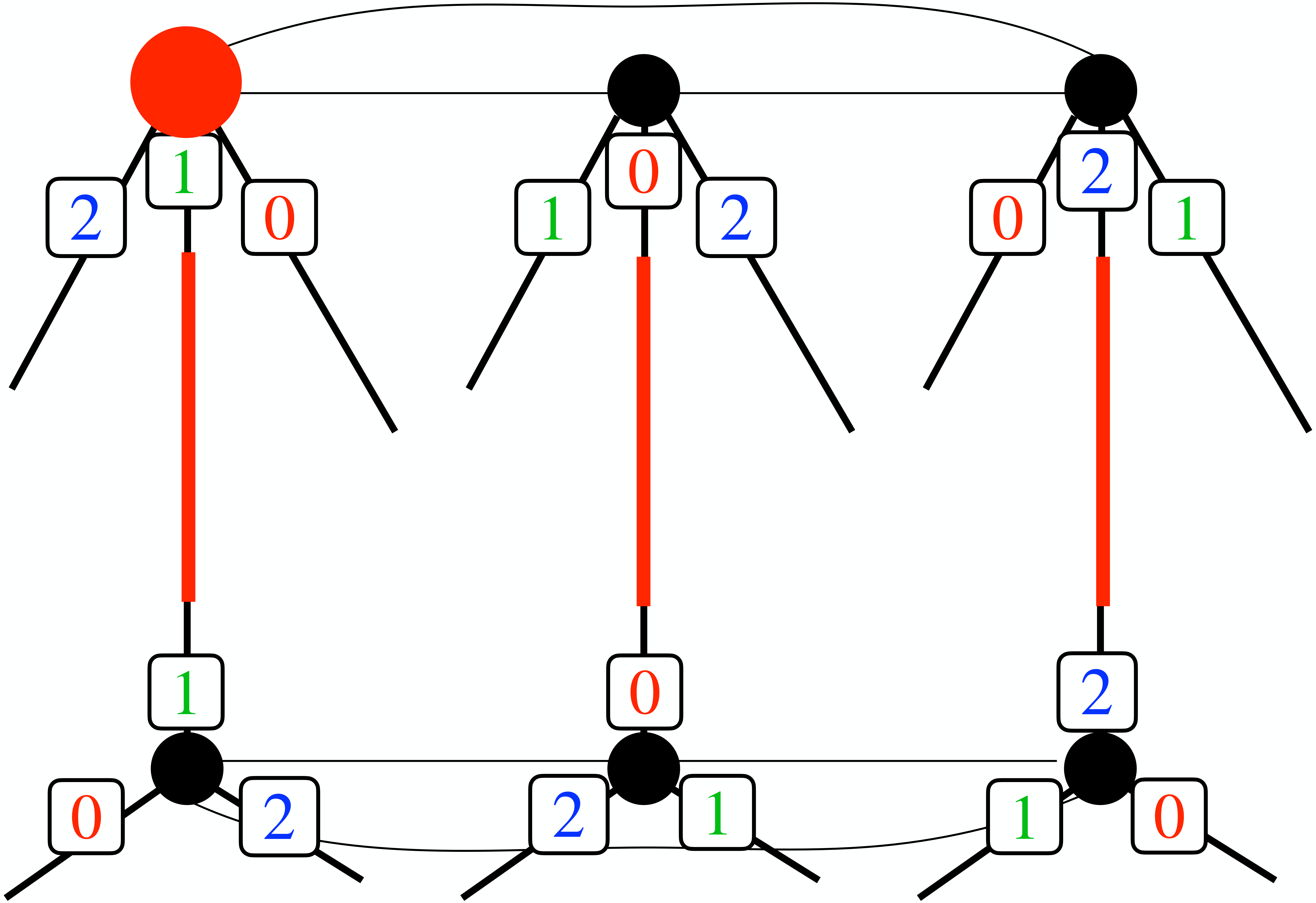


Gから得られたグラフH

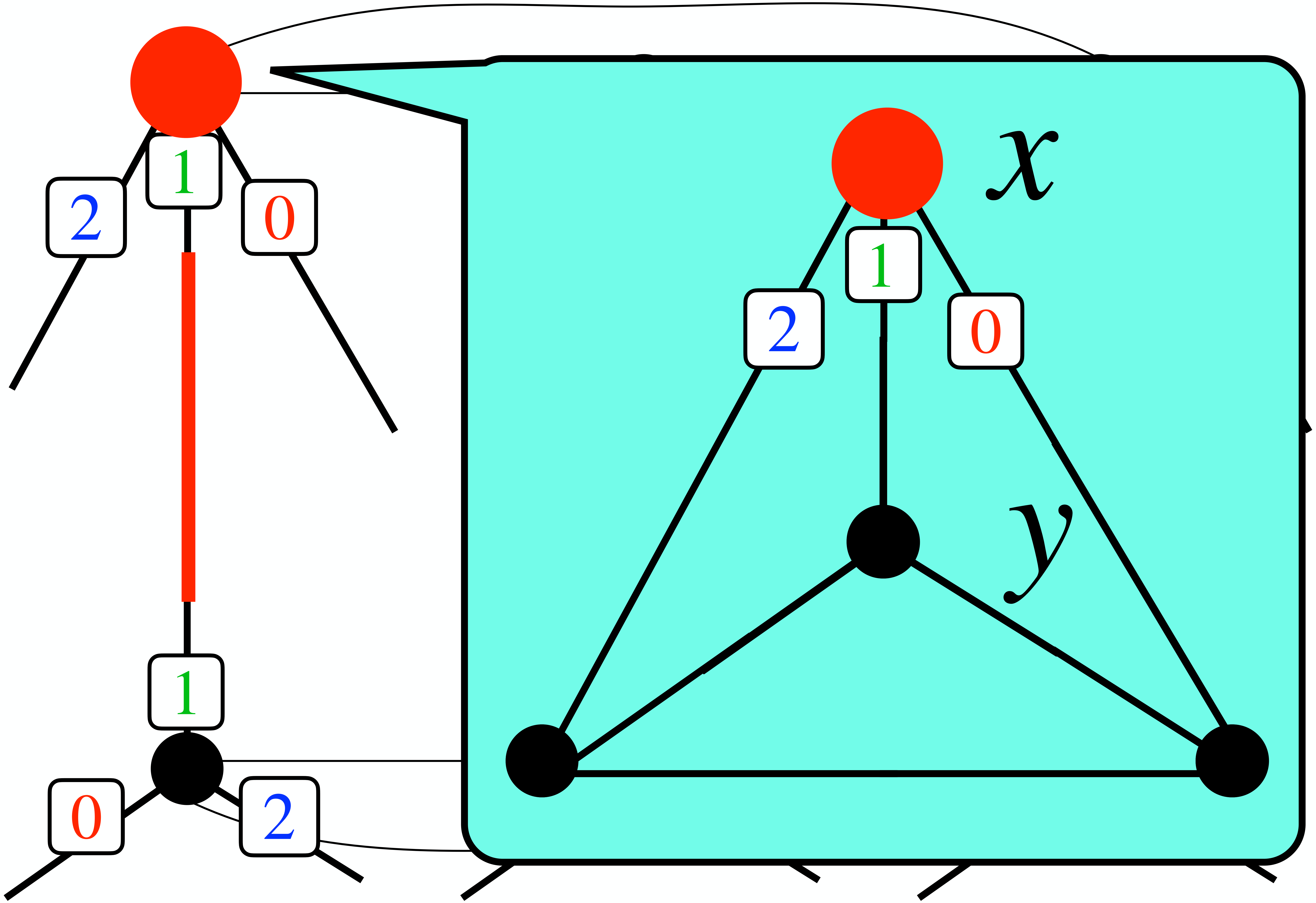


独立点集合で確認する。

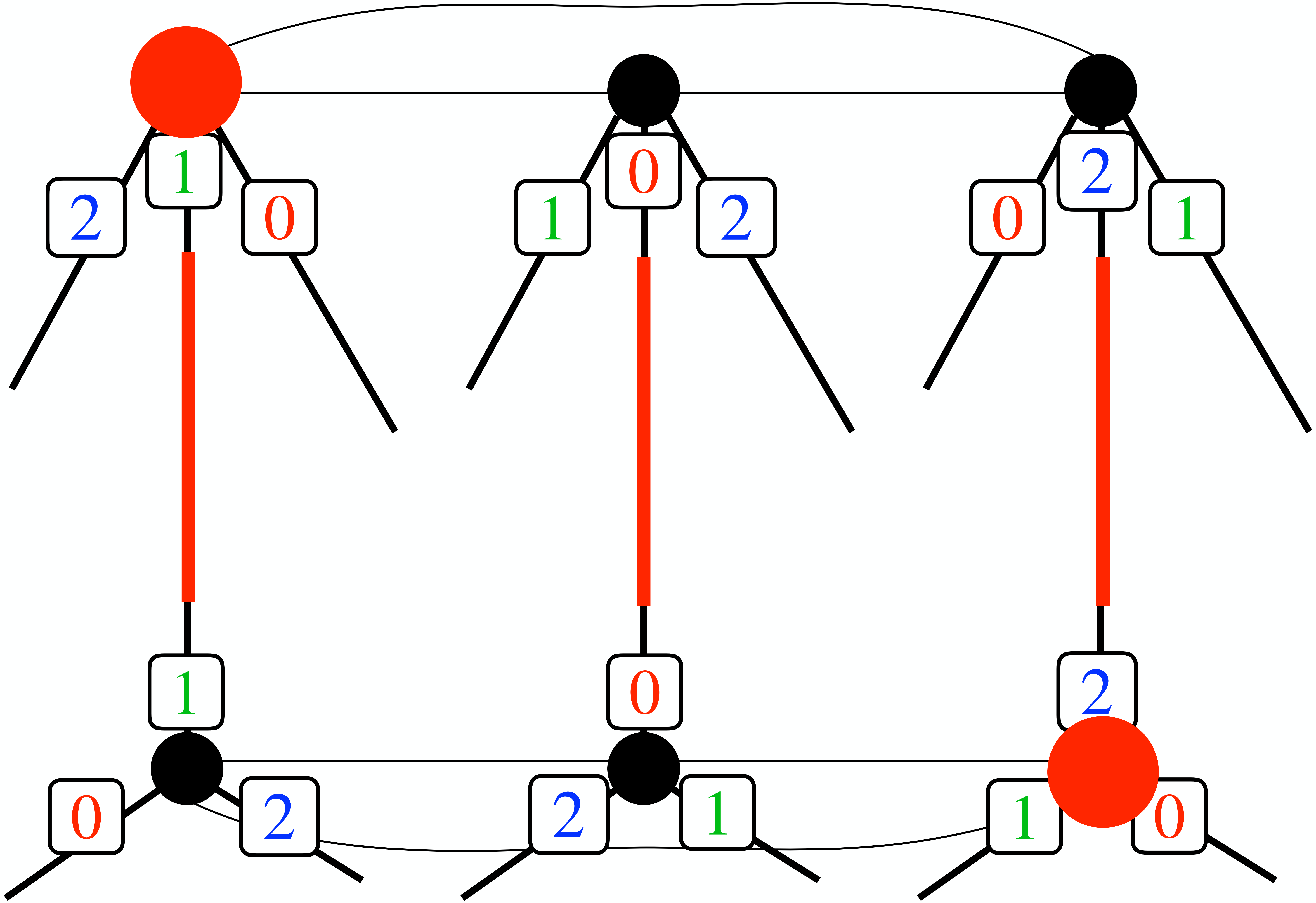
独立点集合が何を意味しているか？



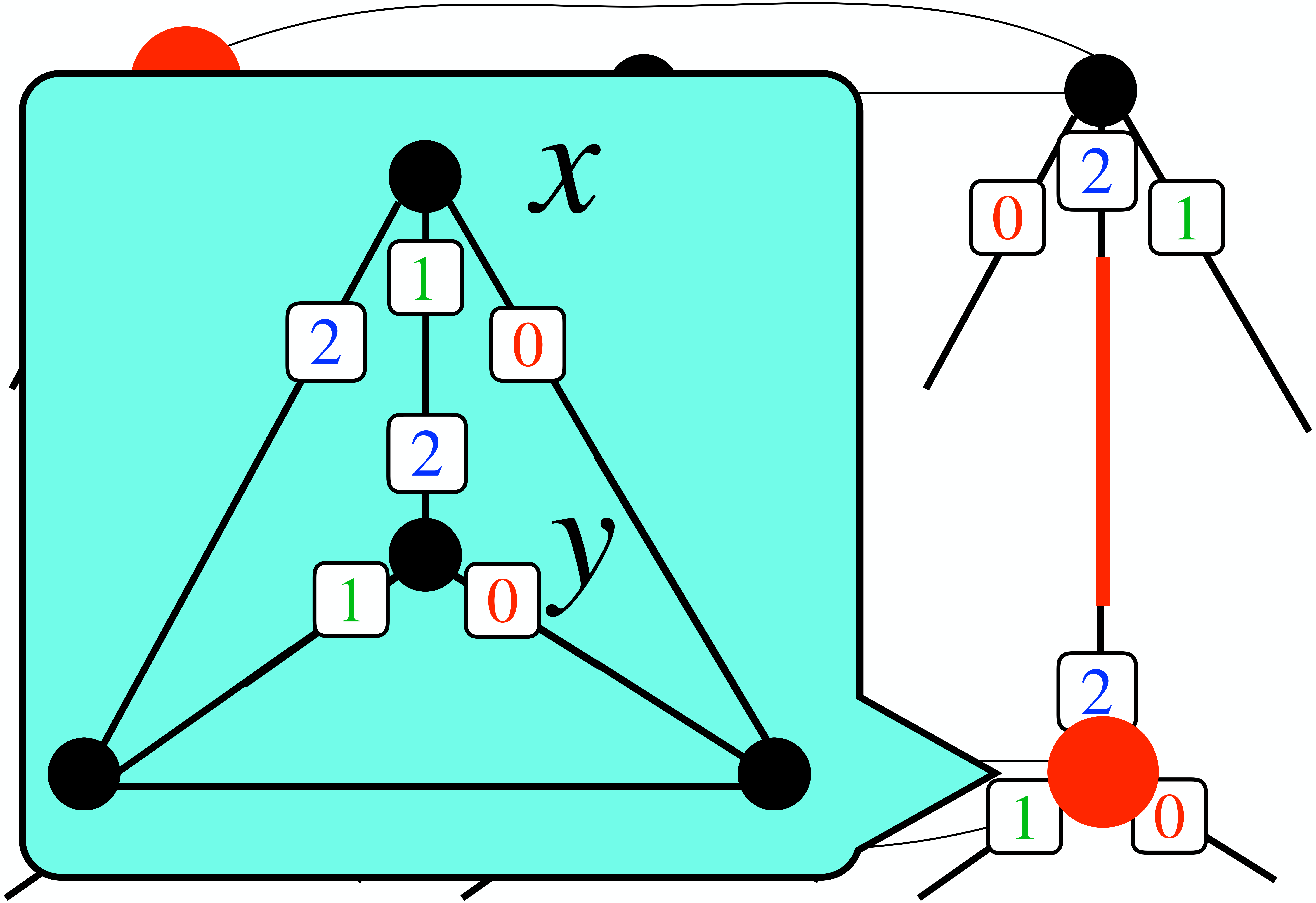
独立点集合が何を意味しているか？



独立点集合が何を意味しているか？



独立点集合が何を意味しているか？



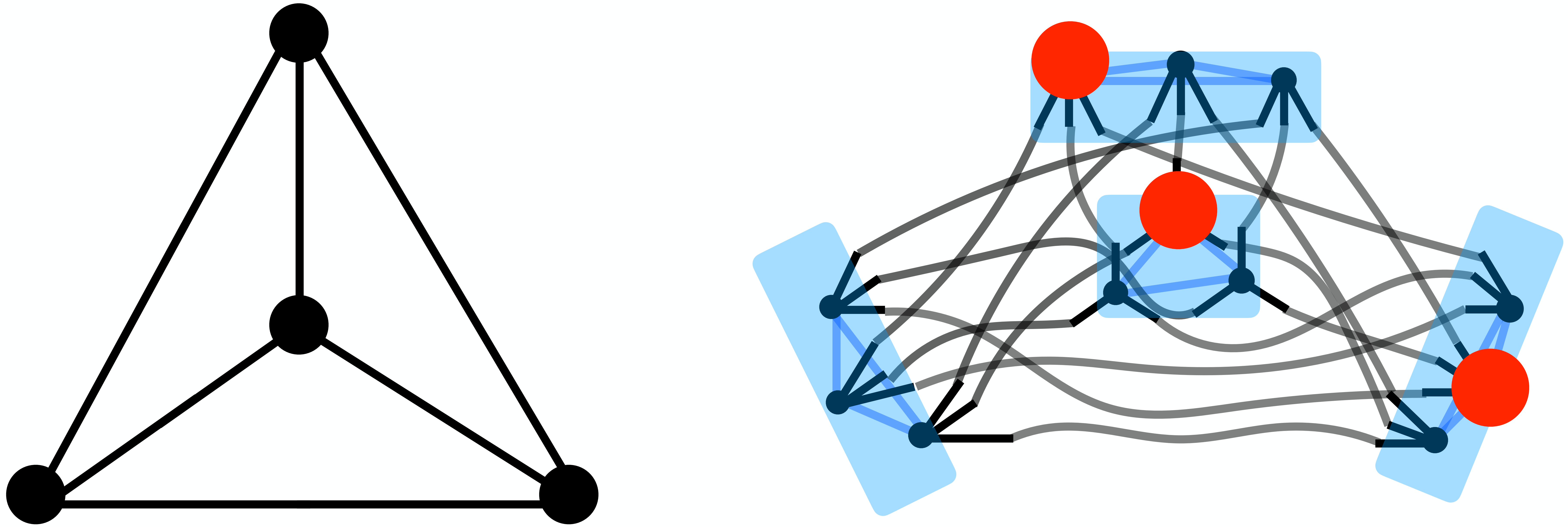
Lemma.

G : 向き付け可能閉曲面**F**に埋め込まれた***k*-正則グラフ**

H : Gからなる特別なグラフ

I : Hの最大独立点集合

G が**clockwise *k*-labeling**を持つ$\Longleftrightarrow |I| = |G|$



$|I| < |K_4|$

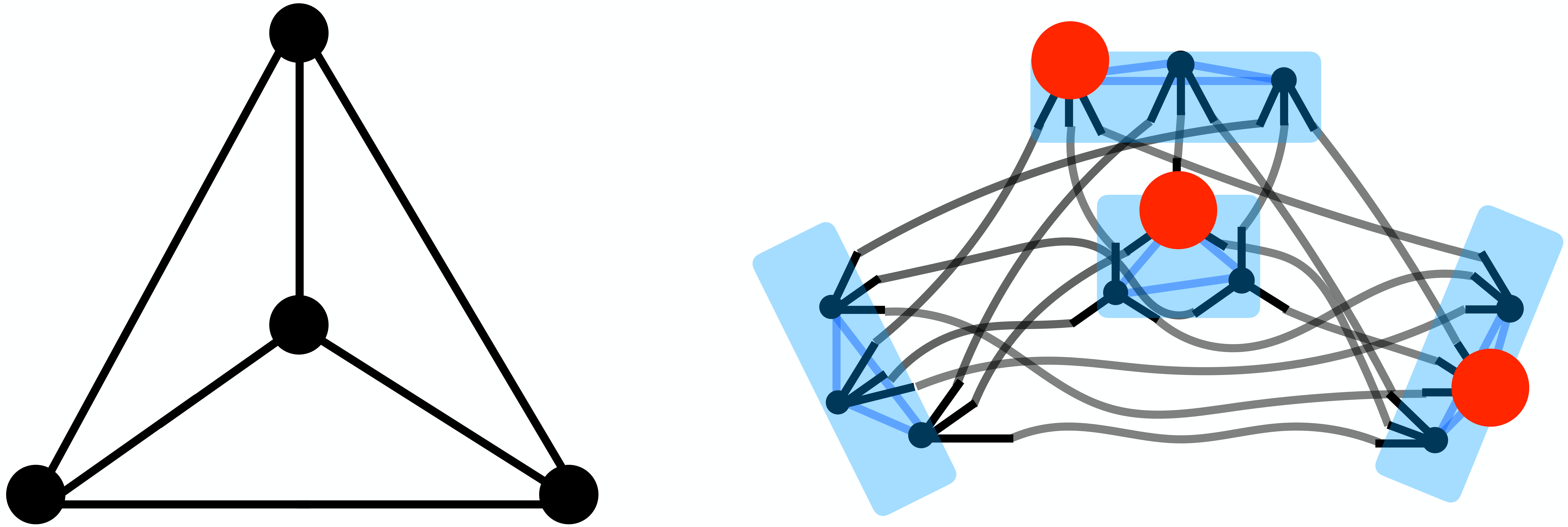
Lemma.

G : 向き付け可能閉曲面**F**に埋め込まれた***k*-正則**グラフ

H : Gのcover

I : Hの最大独立点集合

G が**clockwise *k*-labeling**を持つ $\Longleftrightarrow$ $|I| = |G|$



$|K_4| > |I|$

Lemma.

G : 向き付け可能閉曲面**F**に埋め込まれた***k*-正則グラフ**

H : Gのcover

I : Hの最大独立点集合

G が**clockwise *k*-labeling**を持つ $\Longleftrightarrow |I| = |G|$

Lemma.

G : 向き付け可能閉曲面**F**に埋め込まれた***k*-正則グラフ**

H : Gのcover

I : Hの最大独立点集合

G が**clockwise *k*-labeling**を持つ $\Longleftrightarrow$ $|I| = |G|$

Def. (DP coloring) グラフGについて,

グラフGの任意の*cover*について, $|I| = |G|$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ***G*は*DP k-coloring*を持つ.**

Lemma.

G : 向き付け可能閉曲面**F**に埋め込まれた***k*-正則グラフ**

H : Gのcover

I : Hの最大独立点集合

G が**clockwise *k*-labeling**を持つ $\Longleftrightarrow$ $|I| = |G|$

Def. (DP coloring) グラフGについて,

グラフGの任意の*cover*について, $|I| = |G|$

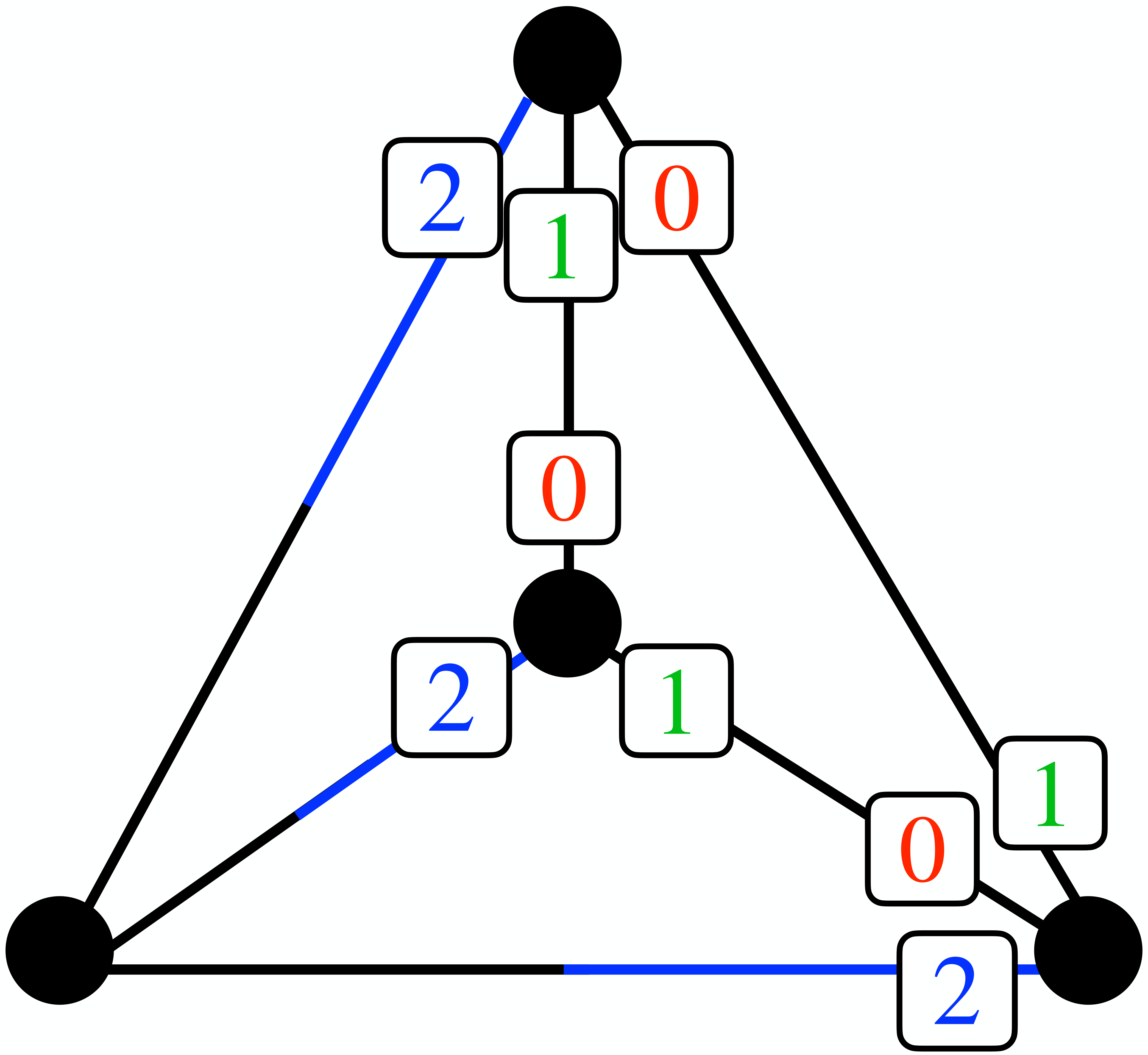
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ***G*はDP *k*-coloringを持つ.**

先行研究.

3-正則グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，Gは*DP k-coloring*を持つ.

Theorem 8.

3-正則平面グラフGについて，Gが完全グラフ K_4 でないならば，clockwise 3-labelingを持つ.



Labeling \ 種数	$g = 0$ （平面）	$g = 1$ （トーラス）	**一般の閉曲面**
Clockwise 2-labeling	Face 2-colorableな埋め込みを持つ2k-正則グラフ		
Clockwise 3-labeling	K_4以外の**3-**正則グラフ		
Clockwise *k*-labeling	$\|I\| = \|G\|$を満たす***k*-**正則グラフ		