退職記念・研究ノート

Black－Scholes モデルにおける Greeks

津　野　義　道

Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパ型オプションの価格過程が、各種のパラメータ、たとえば、$t=0$ における証券価格 S_0、証券価格のボラティリティー σ、権利行使価格 K 等に依存する比率を求めることは、実務の観点からも重要な意義がある。この問題では、最近、Malliavin 解析を応用して“感度分析の微分公式”を導出し、その数値解は Monte-Carlo 法で求めている。Malliavin 解析の要諦は、超関数論（Distribution Theory）と同様に、「部分積分の手法」にあるといわれている。

このノートでは、「部分積分の手法」という観点から、「Black-Scholes モデルにおけるヨーロッパ型オプション」の感度分析の微分公式を導出する。Malliavin 解析は利用しないが、Malliavin-Thalmajer [1] にある例題（[1; Ex 2.7, p. 29]）、Lions-school [2,3] にある例題（Vega）に則して解説する。次の 2 つを調べる。

・現在の証券価格 S_0 に関する感度分析（デルタ：Δ）
・証券のボラティリティー σ に関する感度分析（ベガ：Vega）

＊このノートは、大学院のセミナー用に作成した資料を、ほぼそのままの形で掲載させていただいた。冗長な点も多々あるが、御寛恕をこう。また、セミナーの参加者・協同研究者である、斎藤 進教授、吉原 好孝氏、磯山 啓明氏に感謝する。

1. 基本性質

1.1　証券の価格過程 $S(t)$ は、次の確率微分方程式に従うものとする。

$$dS(t)=\sigma S(t)dW(t) \tag{1}$$

ここで、$\sigma(\sigma>0)$ は証券のボラティリティーと呼ばれ、価格変動の大きさを表す指標であり、W_t は 1 次元の標準 Brown 運動である。この解は次になる。

$$S(t)=S(0)\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W(t)\right) \tag{2}$$

注意　Black-Scholes モデルにおける証券の価格過程は、定数 α を用いて、次で表示されることを仮定した。α は、当該証券の“長期期待収益率”である。

$$\begin{aligned} & S(t)=S(0)\ \exp(\alpha t+\sigma W(t)) \\ \Leftrightarrow\ & dS(t)=\left(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2\right)S(t)dt+\sigma S(t)\,dW(t) \end{aligned} \tag{3}$$

(3) 式を (1) 式に帰着させる手段（ドリフト項の処理）が、Girsanov の定理である。その結果、証券の割引価格過程がマルチンゲールになり、「リスク中立確率測度（同値マルチンゲール測度）」が導入された。(1) 式に現れる W_t は、同値マルチンゲール測度に関する Brown 運動である。

1.2　満期が T であるヨーロッパ型オプションの価格過程 $\{\Phi_t\}$ は、同値マルチンゲール測度を用いて

$$\Phi_t = \Phi_t(S(t)) = E[\varphi(S(T)) \mid \mathcal{F}_t] \tag{4}$$

で決まることを仮定する。たとえば、権利行使価格が K 円のコール・オプションでは

$$\varphi(S(T)) = [S(T) - K]^+ = \begin{cases} S(T) - K : S(T) \geq K \text{のとき} \\ 0 \qquad\quad : \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

である。

注意　この仮定 (4) は、割引率を含んでいないから、無リスク債権の利子率 r は $r=0$ としている。言い換えれば、すべての資産価値が、満期時点を基準にした“割引価値”になっていることを意味している。また、オプションの利得 $\varphi(S(T))$ が「経路」に依存しないで、満期の証券価格 $\varphi(S(T))$ のみで決定されることも意味している。さらに、T 期における任意の利得 $\varphi(S(T))$ が、自己資金充足的な投資戦略で複製できることも、その背景にある。したがって、t 時点でのオプション価格 Φ_t が $S(t)$ のみで決まることになる。$\Phi_t = \Phi_t(S(t))$ の含意になる。複製可能性は、Black-Scholes の微分方程式を導出するときの基礎であった。

簡単のため、次を仮定する。

仮定　満期におけるデリバティブの利得を表す関数 $\varphi(x)$ は、C^1 級で緩増加な関数とする。

注意　コール・オプションやプット・オプションの場合は、$\varphi(x)$ は $x=K$ の点で微分不可能になる。しかし、“$S(T)$ が丁度 K になるような確率”は 0 になる（無視できる）から、「$\varphi(x)$ が C^1 級の関数」という仮定は、“応用”では許容されるものと思える。しかし、超関数論では、このような関数の（一般化された）導関数には Dirac の δ 関数が出現するから、その影響は不明である。

2. 初期価格に対する感応度

2.1　直接計算による方法

オプションの Delta（初期値に関する感応度）は、$t=0$ で考えるから、(4) 式で $t=0$ にとる。

$$\begin{aligned} \Phi_0(S(0)) &= E[\varphi(S(T))] \\ &= E\left[\varphi\left(S(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

T 時点での Brown 運動の確率密度関数 $p(T, w)$ は

$$p(T,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) \tag{6}$$

であるから、$S(0)=x$ とおいて、$\Phi_0(x)$ は、次になる。

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right)\right) p(T,w)\, dw \tag{7}$$

・変数変換：φ の“中身”を y とおく。

$$y = x\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right)$$

$$\log\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) = w$$

w を (6) 式に代入して、積分を w 変数から y 変数に変換する。
$p(T, w)$ を y 変数で表示したものを $q(T; x, y)$ と記す。

$$\begin{aligned} q(T; x, y) &= p(T, w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

次に、dw を dy に直す。

$$dw = \frac{1}{\sigma y} dy$$

以上の変数変換の結果、$Q(T; x, y)$ を

$$\begin{aligned} Q(T; x, y) &= q(T; x, y) \cdot \frac{1}{\sigma y} \\ &= \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^2\right) \end{aligned} \tag{9}$$

で定めれば、(7) 式が次で表示される。

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, Q(T; x, y)\, dy \tag{10}$$

注意　(9) 式は、$\sigma = 1$ とすれば、Malliavin-Thalmaier [1: p.29] にある $p_x(y)$ 式 に一致する。

オプションの Delta は、$t = 0$ でのオプション価格 $\Phi_0(x)$ の $x = S(0)$ に関する微分で定義される。

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx}\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\left(\frac{\partial}{\partial x} Q(T; x, y)\right) dy$$

注意　ここでは、“微分と積分の順序交換”を行っている。たとえば、$\varphi(\xi)$ が“緩増加関数”であればよい。

ここで、次の “うまい工夫” を行う。

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(T; x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\log Q(T; x, y) \cdot Q(T; x, y)$$

Q の定義式 (9) を利用すれば、$\log Q$ が “簡単” になる。

$$\begin{aligned}\log Q &= -\log(\sigma y\sqrt{2\pi T}) - \frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^2 \\ &= -\log(\sigma y\sqrt{2\pi T}) - \frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2\right)\end{aligned}$$

したがって次が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\log Q = \frac{1}{xT\sigma^2}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \tag{11}$$

証券価格の式（2）:

$$S(t) = S(0)\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right)$$

より、$y = S(T)$、$x = \mathrm{S}(0)$ に注意すれば、次が成立する。

$$\log\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(T)$$

すなわち

$$\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T = \sigma W(T)$$

となるから、$\partial \log Q/\partial x$ は、次でも表示できる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\log Q = \frac{W(T)}{xT\sigma} \tag{12}$$

●ここまでの要約

・満期 T での利得が $\varphi(S(T))$ であるような ヨーロッパ型のオプションの、$t = 0$ での価格は、無リスク債権の利子率を $r = 0$ とすれば、（5）式の Φ_0 で与えられた。

$$\Phi_0 = E\left[\varphi(S(T))\right]$$

・変数変換により、$\Phi_0(x)$, $(x = S(0))$ は（9）式で表される関数 $Q(T; x, y)$ を用いて（10）式:

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, Q(T; x, y)\, dy$$

で表示された。

・オプションの Delta は、次で定義される。

$$\Delta(x, T) = \frac{d}{dx}\Phi_0(x)$$

・Delta の計算は、$\partial Q/\partial x$ の計算に帰着される。この計算では、次の結果が得られた。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\log Q &= \frac{1}{xT\sigma^2}\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\ &= \frac{W(T)}{xT\sigma}\end{aligned}$$

最後の式では、$W(T)$ が $y(=\mathrm{S(T)})$ に依存している点に注意する。

・以上の結果より、$\Delta(x,T)$ は次で表示される。

$$\Delta(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\cdot\frac{1}{xT\sigma^2}\left(\log\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\cdot Q(T;x,y)\,dy \tag{13}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\cdot\frac{W(T)}{xT\sigma}\cdot Q(T;x,y)\,dy \tag{14}$$

・ここまでの結論が、Malliavin-Thalmaier [1: example 2.7] に載っている。

注意　“要約”の最後の式 (14) で、$W(T)/xT\sigma$ を積分の外に出して

$$\frac{d}{dx}\Phi_0 = \frac{W(T)}{xT\sigma}\cdot\Phi_0$$

としてはいけない。T 期の証券価格 $S(T)=y$ は、Brown 運動の到達点 $W(T)$ に依存している。すなわち、$W(T)$ は y の関数である。実際、$\frac{d}{dx}\Phi_0$ は“確率要素”のない「証券市場」から観測可能な数値である。一方、右辺の $W(T)$ は T 時点での Brown 運動がとる値であり、これは $t=0$ では観測（予測）不能な量である。

注意　Malliavin-Thalmaier [1: p. 29] では、(13) 式：

$$\Delta(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\cdot\frac{1}{xT\sigma^2}\left(\log\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\cdot Q(T;x,y)\,dy$$

に現れる項 $w(x,y)$:

$$w(x,y) := \frac{1}{xT\sigma^2}\left(\log\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) = \frac{W(T)}{xT\sigma}$$

を“PDE weight”とよんでいる。「PDE weight の問題」は、効率的な Monte-Carlo 法の計算で重要になるらしい。Lions-school [3] で解析がなされている。

研究課題（実証研究）　Δ の表示式 (13) は次であった。

$$\Delta(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\cdot\frac{1}{xT\sigma^2}\left(\log\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\cdot Q(T;x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{xT\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\cdot\log\left(\frac{y}{x}\right)\cdot Q(T;x,y)\,dy + \frac{1}{2x}\Phi_0(x) \tag{15}$$

オプション価格 $\Phi_0(x)$, $x=S(0)$ と、その Delta $\Delta(x,T)$ は市場で観測可能であろう。そうならば、(15) 式から、証券の volatility σ が「実証的に」推定できるか。

・実行可能か ???

・積分核 $Q(T;x,y)$ も σ に依存している。

2.2　部分積分を用いる方法

ここでは、Black-Scholes モデルにおける $\Delta(x,T)$ を“部分積分”を用いて計算し、(14) 式を別の方法で導出する。

$$\Delta(x,T) = \frac{d}{dx}E[\varphi(S(T))], \quad x=S(0)$$

価格過程 $S(t)$ は、(2) 式より次であった。

$$S(t)=x\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W(t)\right)$$

したがって、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dx}S(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W(t)\right) \tag{16}$$

- $\varphi(X)$ の微分を $\varphi'(X)$ と記す。

$$\frac{d}{dX}\varphi(X)=\varphi'(X)$$

- $x=S(0)$ として、$\varphi(S(t))$ を x で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\varphi(S(T))&=\varphi'(S(T))\cdot\frac{dS(T)}{dx}\\&=\varphi'(S(T))\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W(T)\right)\end{aligned} \tag{17}$$

- Malliavin 微分にならって、$\varphi(S(t))$ を $w(=W(t))$ で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw}\varphi(S(t))&=\frac{d}{dw}\varphi\left(S(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma w\right)\right)\\&=\varphi'(S(t))\cdot S(0)\cdot\sigma\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma w\right)\end{aligned}$$

この式で、t に T を代入すれば、次が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw}\varphi(S(T))&=\varphi'(S(T))\cdot S(0)\cdot\sigma\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W(T)\right)\\&=x\sigma\cdot\varphi'(S(T))\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W(T)\right)\end{aligned} \tag{18}$$

(17) 式と (18) 式より、次がわかる。

$$\frac{d}{dx}\varphi(S(T))=\frac{1}{x\sigma}\frac{d}{dw}\varphi(S(T)) \tag{19}$$

(19) 式を用いて、(14) 式とは別に、$\Delta(x,T)$ の表示式が得られる。

$$\Delta(x,T)=\frac{d}{dx}E[\varphi(S(T))]=E\left[\frac{d}{dx}\varphi(S(T))\right]=E\left[\frac{1}{x\sigma}\cdot\frac{d}{dw}\varphi(S(T))\right] \tag{20}$$

注意　Malliavin-Thalmaier [1] の 1.2 節, 1.3 節では、d/dw を D_t と記し、一般の $\psi(W)$ に対する“微分 $D_t\psi$”を定義している。その方法は、区間 [0, T] を 2^n 等分分割（Dyadic Filtration）して、$\psi(W)$ を“折れ線”で近似し、“増分に関する微分”を考えることでなされている。さらに、“ベクトル場”

$$Z=\frac{1}{x\sigma}\int_t D_t$$

を用いて、(20) 式を次で表示している。

$$\Delta(x,T)=E[Dz\varphi(S(T))]$$

このベクトル場 Z を、Malliavin-Thalmaier [1] では“smeared vector field”とよんでいる。

$\Delta(x,T)$ の表示式 (20) は、次を意味する。

$$\Delta(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x\sigma}\frac{d}{dw}\varphi(S(T)) \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right)dw \tag{21}$$

(21) 式を「部分積分」する。$\varphi(\xi)$ が“緩増加関数”であれば、$w \to \pm\infty$ としたとき $|S(T)| \le const \cdot e^{\sigma|w|}$ であるから、部分積分における“完全積分項”が 0 になる。「$\varphi(\xi)$ が“緩増加関数”である」という仮定は、2.1 節の「直接計算による方法」でも利用された。

(21) 式の「部分積分」を実行する。

$$\begin{aligned}\Delta(x,T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x\sigma}\frac{d}{dw}\varphi(S(T)) \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right)dw \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{x\sigma}\exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right)\right)dw \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{1}{x\sigma}\exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right) \cdot \left(-\frac{w}{T}\right)dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(S(T)) \cdot \frac{w}{x\sigma T} \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2T}\right)dw \end{aligned} \tag{22}$$

(22) 式は、次のように書き換えられる。

$$\Delta(x,T) = E\left[\varphi(S(T))\frac{W(T)}{x\sigma T}\right] \tag{23}$$

注意　$\Delta(x,T)$ の表示式 (23) は、「直接計算」で得られた表示式 (14) に一致している。この式が、Malliavin-Thalmaier [1] の (2.28) 式 (p. 35) である。

3. ボラティリティーに関する感応度

Black-Scholes モデルにおけるオプションの、ボラティリティーに関する“感度（微分）”は Vega と呼ばれる。モデルでは、ボラティリティー は一定（定数）とする。

3.1　直接計算による方法

Black-Scholes モデルに現れるパラメータは定数であるから、*greeks* が直接計算できる。その手法は Delta の場合と同様である。2 節から、以下を抜粋する。

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)Q(T;x,y)\,dy \tag{24}$$

ここで、$Q(T;x,y)$ は次である。

$$Q(T;x,y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\log y - \log x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\right)^2\right) \tag{25}$$

オプションの Vega は、次の計算である。

$$V(x,T)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\Phi_0$$

“Delta”の場合と同様に、次を利用する。

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}Q(\sigma)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\log Q(\sigma)\cdot Q(\sigma)$$

“Delta”の場合に $\log Q$ を計算した。

$$\log Q \;=-\log(\sigma y\sqrt{2\pi T})-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\log y-\log x+\frac{1}{2}\sigma^2T\right)^2\right)$$

この式より、$\partial(\log Q)/\partial\sigma$ が“楽に”計算できる。計算の途中で、Delta のときに用いた次の関係を利用する。

$$\log y-\log x+\frac{1}{2}\sigma^2T=\sigma W(T)$$

途中を省略して、結果は次である。

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log Q=\frac{1}{\sigma T}(W^2-\sigma TW-T)$$

以上より、Vega の公式が得られる。

$$\begin{aligned}V(x,T)=\frac{\partial\Phi_0}{\partial\sigma}&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\sigma}\log Q(\sigma)\cdot Q(\sigma)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\cdot\frac{1}{\sigma T}(W^2-\sigma TW-T)\cdot Q(\sigma)\,dy\\&=\frac{1}{\sigma T}\cdot E[\varphi(S(T))\cdot(W(T)^2-\sigma T\,W(T)-T)]\end{aligned}\tag{26}$$

3.2　部分積分を利用する方法

Black-Scholes モデルにおける価格過程の確率微分式：

$$dS(t)=\sigma S(t)\,dW(t)$$

で σ を $\sigma+\varepsilon$ に置き換えた価格過程を S_ε と記せば、S_ε をあらわす確率微分方程式は、次になる。

$$\begin{aligned}dS_\varepsilon&=(\sigma+\varepsilon)S_\varepsilon dw\\&=\sigma S_\varepsilon dW+\varepsilon S_\varepsilon dW\end{aligned}\tag{27}$$

注意　Malliavin-Thalmaier [1] では、この式から $\Psi=\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}S_\varepsilon$ がみたすべき確率微分方程式を求めて、それを解いている。

このノートでは、直接 (27) 式を解く方法をとる。(27) 式の解は次である。

$$S_\varepsilon(t)=S(0)\exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)^2 t+(\sigma+\varepsilon)W(t)\right) \tag{28}$$

(28) 式を ε で微分すれば、次が得られる。

$$\begin{aligned}&\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} S_\varepsilon(t)\\ &= S(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W(t)\right)\times(-\sigma t+W(t))\\ &= S(t)\times(W(t)-\sigma t)\end{aligned}$$

注意　この式が、Malliavin-Thalmaier [1] の p. 36 の「下から 9 行目」にある。

$$\Psi(t)=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} S_\varepsilon(t)=S(t)\cdot(W(t)-\sigma t)$$

Malliavin-Thalmaier [1] から離れて、先へ進む。

満期 T で、そのときの利得が $\varphi(S(T))$ であるヨーロッパ型オプションの Vega を計算する。求めるべき式は、次である。

$$V(x,T)=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} E[\varphi(S_\varepsilon(T))]=E\left[\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varphi(S_\varepsilon(T))\right] \tag{29}$$

$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varphi(S_\varepsilon(T))$ の計算を行う。

・直接計算

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varphi(S_\varepsilon(T))&=\varphi'(S(T))\times\left.\frac{d}{d\varepsilon}S_\varepsilon(t)\right|_{\varepsilon=0}\\ &=\varphi'(S(T))\times(S(T)\cdot(W(T)-\sigma T))\end{aligned} \tag{30}$$

・2.2 節と同様にして、$\varphi(S_\varepsilon(t))$ の“Malliavin 微分 $D_t\varphi$”を求める。$D_t\varphi$ は、このような簡単な例では、$\varphi(S_\varepsilon(t))$ を $w(=W(t))$ で微分することである。微分した後で $\varepsilon=0$ を代入するのが本当であるが、ε は $W(t)$ の係数に入っているから、はじめから $\varepsilon=0$ として計算する。$\frac{d\varphi}{dw}$ は、Delta の所の計算が利用できる。

$$\frac{d}{dw}\varphi(S(T))=\varphi'(S(T))\times(\sigma\cdot S(T)) \tag{31}$$

・(30)、(31) より、次がわかる。

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varphi(S_\varepsilon(T))=\frac{W(T)-\sigma T}{\sigma}\cdot\frac{d}{dw}\varphi(S(T)) \tag{32}$$

(32) 式を (29) 式へ代入すれば、次が得られる。

$$V(x,T)=E\left[\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varphi(S_\varepsilon(T))\right]=E\left[\frac{W(T)-\sigma T}{\sigma}\cdot\frac{d}{dw}\varphi(S(T))\right] \tag{33}$$

注意　Malliavin-Thalmaier [1] の記法では、ベクトル場 Z を

$$Z=\frac{1}{\sigma}\int_t(W(t)-\sigma t)\,D_t$$

で定めたとき、(33) 式は、$t=T$ で、次が成り立つことを意味しているようである。

$$V(x,T)=E[D_Z(\varphi(S(T)))]=E[D_Z\Phi]$$

Malliavin-Thalmaier [1] の p. 37、上から 2 行目、4 行目に次の式がある。

$$V(x, T) = E\,[D_{xfZ}\Phi],\ \Phi = \varphi\,(S(T))$$

$$D_{xfZ}\,(W(T)) = \frac{f}{\sigma}\left(= \frac{W(T)-\sigma T}{\sigma}\right)$$

Malliavin-Thalmaier の方法では、残りの課題は、D_Z の共役作用素 $v(Z)$ を部分積分の方法で求めることになる。

$$V(x, T) = E\,[D_Z\varphi\,(S(T))] = E\,[\varphi\,(S(T))\cdot v(Z)]$$

このノートでは Malliavin-Thalmaier [1] によらないで、(33) 式を直接、部分積分する。

(33) 式は、次を意味する。

$$\begin{aligned} V(x,T) &= E\left[\frac{W(T)-\sigma T}{\sigma}\cdot\frac{d}{dw}\varphi(S(T))\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{w-\sigma T}{\sigma}\cdot\frac{d}{dw}\varphi(S(T))\right)\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right)dw \end{aligned} \tag{34}$$

(34) 式の部分積分では、次を計算することになる。

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dw}\left\{\frac{w-\sigma T}{\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right) - \frac{w-\sigma T}{\sigma}\cdot\left(-\frac{w}{T}\right)\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right) \\ &= \left\{-\frac{1}{\sigma}+\frac{w(w-\sigma T)}{\sigma T}\right\}\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right) \\ &= \frac{1}{\sigma T}\cdot(w^2-\sigma Tw-T)\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right) \end{aligned} \tag{35}$$

部分積分では、Delta の場合と同様に「完全積分項」は 0 になる。(34) 式を部分積分すれば、次が得られる。

$$\begin{aligned} &V(x\,,T\,) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{w-\sigma T}{\sigma}\cdot\frac{d}{dw}\varphi(S(T))\right)\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right)dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\,(S(T)\cdot\frac{1}{\sigma T}\cdot(w^2-\sigma Tw-T)\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right)dw \\ &= \frac{1}{\sigma T}\cdot E\,[\varphi(S(T))\cdot(W(T)^2-\sigma T\,W(T)-T)] \end{aligned} \tag{36}$$

この式は、直接計算で得られた結果 (26) 式に一致する。

注意　Vega の微分公式 (26) = (36) は、Lions-school [2] の p. 405、上から 9 行目にある結果に一致する。Lions たちは、Malliavin 解析を用いてこの式を導出している。

参考文献

[1] P. Malliavin-A. Thalmaier, *Stochastic Caluculus of Variations in Mathematical Finance*, 2006, Springer

[2] E. Fournié-J. M. Lasry-J. Leburchoux-P. L. Lions, *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance*, Finance and Stochastics **3** (1999), 391-412

[3] E. Fournié-J. M. Lasry-J. Leburchoux-P. L. Lions, *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II*, Finance and Stochastics **5** (2005), 201-236